Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
28. Juni 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 10

Aufgabe 42: Polarisierung

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Skalarproduktraum. Zeigen Sie, dass für jeden Endomorphismus $T \in \mathcal{L}(V)$ die Polarisierungsgleichung gilt:

$$\begin{aligned}\langle u, Tv\rangle \quad &= \quad \tfrac{1}{4}\big(\langle u+v, T(u+v)\rangle - \langle u-v, T(u-v)\rangle \\ &\quad -\mathrm{i}\langle u+\mathrm{i}v, T(u+\mathrm{i}v)\rangle + \mathrm{i}\langle u-\mathrm{i}v, T(u-\mathrm{i}v)\rangle\big), \qquad \text{für alle } u,v \in V\,.\end{aligned}$$

(b) Folgern Sie, dass $T \in \mathcal{L}(V)$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn $\langle u, Tu\rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in V$.

Aufgabe 43: Matrizen

(a) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ liegt, aber nicht in $\mathrm{SU}(3)$.

(b) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{O}(2)$ liegt, aber nicht in $\mathrm{SO}(2)$.

(c) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{U}(3)$ liegt, aber weder in $\mathrm{O}(3)$ noch in $\mathrm{SU}(3)$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 44: Isometrien des euklidischen Raumes

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Skalarproduktraum und $F : V \to V$ eine (nicht notwendigerweise lineare) längentreue Abbildung, d.h.

$$\|F(u) - F(v)\| = \|u - v\|, \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

Zeigen Sie, dass es eine lineare Isometrie T von V gibt mit

$$F(u) = F(0) + Tu, \qquad \text{für alle } u \in V.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $f : V \to V$, $u \mapsto f(u) = F(u) - F(0)$ isometrisch und linear ist, indem Sie die Parallelogrammgleichung und die Polarisationsidentität verwenden, um nacheinander folgende Schritte zu zeigen: $\|f(u)\| = \|u\|$, $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$, $f(-v) = -f(v)$, $\|f(u) + f(v)\| = \|u + v\|$, $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Aufgabe 45: Drehbewegungen

Betrachten Sie einen starren Körper, bei dem ein Punkt im Ursprung des Koordinatensystems festgehalten wird. Die Bahn eines Punkts in dem Körper mit Ortsvektor x_0 zur Zeit $t = 0$ wird durch die Abbildung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto x(t) = D(t)x_0$ beschrieben, wobei $D = (d_{ij}) : \mathbb{R} \to \mathrm{SO}(3)$ komponentenweise stetig differenzierbar sei, also $d_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen sind. Es bezeichnet $\dot{D}(t)$ dann die Matrix mit den Einträgen $(\dot{d}_{ij})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit $A(t) = \dot{D}(t)D^{-1}(t)$ gilt, wobei $A(t)$ schiefsymmetrisch ist, d.h. $A^T(t) = -A(t)$ erfüllt.

(b) Sei S der Vektorraum der schiefsymmetrischen 3×3-Matrizen. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $L : \mathbb{R}^3 \to S$ gibt, so dass $L(u)v = u \times v$, für alle $v \in \mathbb{R}^3$. Hier bezeichnet $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wieder das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$, vgl. Aufgabe 12 auf Blatt 3.

(c) Folgern Sie daraus, dass es ein $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\dot{x}(t) = \omega(t) \times x(t)$.

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 05.07.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.