Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
5. Juli 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 11

Aufgabe 46: Diagonalisieren

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$ die

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert, also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Wieviele verschiedene solcher Matrizen S gibt es?

Aufgabe 47: Exponential schiefsymmetrischer Matrizen

Sei $n \in \mathbb{R}^3$ normiert, also $\|n\| = 1$, und $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ der Vektor der Paulimatrizen aus Aufgabe 41. Zeigen Sie, dass

$$\exp(\mathrm{i}\alpha(n \cdot \sigma)) = \cos(\alpha)E_2 + \mathrm{i}(n \cdot \sigma)\sin(\alpha).$$

Folgern Sie daraus, dass $\exp(\mathrm{i}\,\mathfrak{su}(2)) \subset \mathrm{SU}(2)$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen aus Aufgabe 41 und die Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

Aufgabe 48: Kegelschnitte

Es sei A eine reelle, reguläre, symmetrische $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

$$\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle = c$$

durch eine Koordinatentransformation der Form $x' = \alpha x + \beta$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, zu $\langle x', Ax'\rangle = 1$ umformen lässt, falls $c + \frac{1}{4}\langle b, A^{-1}b\rangle > 0$.
Betrachten Sie nun die Gleichung

$$5x_1^2 - 26x_1x_2 + 5x_2^2 + 10x_1 - 26x_2 = 31.$$

Bringen Sie die Gleichung zunächst in die Form $\langle x', Ax'\rangle = 1$, diagonalisieren Sie anschließend A um die Art des Kegelschnitts zu bestimmen. Fertigen Sie eine Skizze des Kegelschnitts in den *ursprünglichen* Koordinaten an.

Aufgabe 49: Rayleigh-Ritz-Prinzip

Sei V ein n-dimensionaler Skalarproduktraum und Q eine quadratische Form, also $Q(u) = \langle u, Tu\rangle$ mit einem symmetrischen Operator T. Seien die Eigenwerte von T der Größe nach angeordnet $\lambda_1 < \cdots < \lambda_m$. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_1 = \min\{Q(u) \mid \|u\| = 1\} \quad \text{und} \quad \lambda_m = \max\{Q(u) \mid \|u\| = 1\}\,.$$

Aufgabe 50: Spektraldarstellung

Bestimmen Sie die Spektraldarstellung der selbstadjungierten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\mathrm{i} \\ 0 & -3 & 0 \\ -3\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. schreiben Sie A in der Form

$$A = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j P_j$$

mit den Eigenwerten λ_j und zugehörigen Spektralprojektionen P_j.

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 12.07.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.