Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
12. Juli 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 12

Aufgabe 51: Äquivalenzrelationen

Welche der folgenden Relationen $\sim$ sind Äquivalenzrelationen (mit Begründung)?

(a) Für Matrizen $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ und $n > 1$ sei $A \sim B :\Leftrightarrow AB = BA$.

(b) Sei M eine nichtleere Menge von Vektorräumen. Für $U, V \in M$ setze $U \sim V$, falls es einen Isomorphismus $\Phi : U \to V$ gibt.

(c) Für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, setze $a \sim b :\Leftrightarrow a \geq b$.

Aufgabe 52: Jordansche Normalform

Sei $A \in M(6, \mathbb{C})$ mit charakteristischem Polynom $(\lambda-1)^2(\lambda+1)^4$. Die geometrischen Vielfachheiten von $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ seien jeweils 2. Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen von A an.

Aufgabe 53: Spur und Determinante auf direkten Summen

Sei der endlichdimensionale Vektorraum V direkte Summe der Unterräume U_j,

$$V = \bigoplus_{j=1}^{n} U_j \,,$$

und $L \in \mathcal{L}(V)$ direkte Summe der Endomorphismen $L_j \in \mathcal{L}(U_j)$, also

$$Lv = \sum_{j=1}^{n} L_j u_j \,,$$

für $v = \sum_j u_j$ mit $u_j \in U_j$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Spur}(L) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Spur}(L_j) \qquad \text{und} \qquad \det(L) = \prod_{j=1}^{n} \det(L_j) \,.$$

Aufgabe 54: Die Formel $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ beliebig und $S \in M(n, \mathbb{C})$ invertierbar. Zeigen Sie zunächst, dass

- $S^{-1} \mathrm{e}^{A} S = \mathrm{e}^{S^{-1}AS}$ und
- $\mathrm{Spur}(S^{-1}AS) = \mathrm{Spur}(A)$

gilt. Zeigen Sie nun die Formel

$$\det(\mathrm{e}^{A}) = \mathrm{e}^{\mathrm{Spur}\, A}$$

unter Verwendung der Jordanschen Normalform.

Tipp: Zeigen Sie die Formel zunächst für ein Jordankästchen und verwenden Sie dann Aufgabe 53.

Abgabe: Falls Sie noch nicht genug Punkte für die Klausurzulassung haben geben Sie bitte Ihre Lösung bis spätestens 10.00 Uhr am Donnerstag den 18.07.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin ab. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.