Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
3. Mai 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 3

Aufgabe 10: Direkte Summe von Unterräumen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $U_1, U_2 \subset V$ Unterräume endlicher Dimension. Zeigen Sie, dass die Summe $U_1 + U_2$ genau dann direkt ist (also $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt), wenn jeder Vektor $u \in U_1 + U_2$ in *eindeutiger* Weise in der Form $u = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 11: Komposition linearer Abbildungen

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und $T : U \to V$ sowie $S : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $S \circ T : U \to W$ linear ist.

Aufgabe 12: Bild und Kern

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils $\mathrm{Kern}(L_j)$, $\mathrm{Bild}(L_j)$, $\dim(\mathrm{Kern}(L_j))$ und $\dim(\mathrm{Bild}(L_j))$.

(a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a \times x$, d.h. das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$.
Zur Erinnerung: $(a_1, a_2, a_3) \times (x_1, x_2, x_3) := (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$.

(b) $L_2 : P_{\mathbb{R}}^{(3)} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x$.
Hier bezeichnet $P_{\mathbb{R}}^{(3)}$ den Raum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich drei.

(c) $L_3 : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $f \mapsto f'$.
Es bezeichnet $C^1(\mathbb{R})$ den Raum der stetig differenzierbaren und $C(\mathbb{R})$ den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

(d) $L_4 : V \oplus V \to V$, $(v, w) \mapsto v - w$, wobei $\dim(V) = n$ sei.

Aufgabe 13: Projektionen

Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) P ist idempotent, d.h. $P^2 := P \circ P = P$.

(ii) Die Einschränkung von P auf $U := \mathrm{Bild}(P)$ ist die Identität, d.h. $P|_U = \mathrm{Id}_U$.

(iii) Es existieren Unterräume $U, W \subset V$, so dass $U + W = V$ und $P(u + w) = u$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

Ist eine dieser Eigenschaften (und damit alle) erfüllt, so heißt P eine Projektion.

Tipp: Zeigen Sie z.B. die Implikationen (i)⇒(ii), (ii)⇒(iii) und (iii)⇒(i).

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 10.05.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.