
MATHEMATIK FÜR PHYSIKER 2 / LINEARE ALGEBRA 1

Übungsblatt 4

Aufgabe 14: Isomorphismen

Seien V, W Vektorräume und (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V . Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn (Lv_1, \dots, Lv_n) eine Basis von W ist.

Aufgabe 15: Die Matrix der Ableitung auf $P_{\mathbb{R}}^{(n)}$

Sei $P_{\mathbb{R}}^{(n)}$ wieder der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich n und $D \in \mathcal{L}(P_{\mathbb{R}}^{(n)})$ der Ableitungsoperator

$$D : P_{\mathbb{R}}^{(n)} \rightarrow P_{\mathbb{R}}^{(n)}, \quad p \mapsto (Dp)(x) = p'(x).$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von D bezüglich der Monombasis $(1, x, x^2, \dots, x^n)$.

Aufgabe 16: Der Rang bei Kompositionen

Seien V, U, W endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{K} und $A \in \mathcal{L}(U, W)$ sowie $B \in \mathcal{L}(V, U)$. Zeigen Sie, dass

$$\text{Rang}(A) + \text{Rang}(B) - \dim U \leq \text{Rang}(AB) \leq \min\{\text{Rang}(A), \text{Rang}(B)\}$$

gilt. Unter welcher Bedingung an $\text{Bild}(B)$ und $\text{Kern}(A)$ gilt jeweils Gleichheit?

Zur Erinnerung: der Rang einer linearen Abbildung L ist $\text{Rang}(L) := \dim(\text{Bild}(L))$.

Hinweis: Verwenden Sie die Dimensionsformel für $\tilde{A} := A|_{\text{Bild}(B)}$.

Aufgabe 17: Die Lie-Algebra der $n \times n$ -Matrizen

Wir betrachten den Vektorraum $M(n, \mathbb{K})$ der $n \times n$ -Matrizen. Zeigen Sie, dass dieser durch die Verknüpfung

$$[\cdot, \cdot] : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \rightarrow M(n, \mathbb{K}), \quad (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA$$

zu einer Lie-Algebra wird, d.h. für alle $A, B, C \in M(n, \mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt:

- (i) $[\cdot, \cdot]$ ist bilinear, d.h. $[\alpha A + B, C] = \alpha[A, C] + [B, C]$ und $[A, \alpha B + C] = \alpha[A, B] + [A, C]$,
- (ii) $[A, A] = 0$,
- (iii) und es gilt die Jakobi-Identität $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$.

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 17.05.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.