Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
24. Mai 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 6

Aufgabe 22: Ein lineares Gleichungssystem

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssytems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & -8 & 0 & 6 \\ -3 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 23: Keplersche Fassregel

Johannes Kepler gab 1615 in seiner *Nova steriometria* eine Formel für den Inhalt von Weinfässern an, die auf folgender Näherungsmethode beruht: Zur näherungsweisen Berechnung von $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ betrachten wir die Stützstellen $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ und $x_2 = b$ und setzen $y_k = f(x_k)$ für $k = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p und zeigen Sie

$$\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Aufgabe 24: Methode der kleinsten Quadrate

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichsgerade durch die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$: $(0,2), (1,5), (3,8), (4,9)$. Stellen Sie dazu die Gaußsche Normalengleichung explizit auf und lösen Sie sie.

Aufgabe 25: Matrixgruppen

Zeigen Sie, dass die Menge der Automorphismen $L : V \to V$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Diese Gruppe heißt $\mathrm{GL}(V)$. Für $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $V = \mathbb{C}^n$ schreibt man stattdessen auch $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Wir betrachten nun für $\xi \in \mathbb{R}$ die Lorentztransformationen (der Einfachheit halber in $1+1$ Dimensionen) $A_\xi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$A_\xi = \begin{pmatrix} \cosh(\xi) & \sinh(\xi) \\ \sinh(\xi) & \cosh(\xi) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $A_\xi A_{\xi'} = A_{\xi+\xi'}$ und folgern Sie daraus, dass $\mathrm{SO}(1,1) := \{A_\xi \,|\, \xi \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, dass auch

$$\mathrm{SO}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ist.

Zur Erinnerung: G zusammen mit der Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$ heißt Gruppe, falls gilt:

- *Für alle $f, g, h \in G$ gilt $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.*
- *Es existiert ein Element $e \in G$, sodass gilt $e \circ g = g$ für alle $g \in G$.*
- *Zu jedem $g \in G$ existiert ein Element g^{-1} mit $g \circ g^{-1} = e$.*

$H \subset G$ heißt Untergruppe, falls aus $h, g \in H$ folgt, dass auch $h \circ g \in H$ und $h^{-1} \in H$.

Aufgabe 26: Kubische Splineinterpolation*

(a) Bei der Berechnung von Interpolationspolynomen mittels der in der Vorlesung vorgestellten Methode tritt das Problem auf, dass die so berechneten Polynome nicht unbedingt eine gute Annäherung an die vorgegebene Funktion f liefern, selbst wenn f glatt ist. (Machen Sie sich an einem Beispiel klar, was hier gemeint ist oder googeln Sie "Runges Phänomen".) In der Praxis greift man daher häufig auf Spline-Interpolation zurück. Sei also $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, $y_i := f(x_i)$. Ein natürlicher kubischer Spline $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist nun folgendermaßen definiert. Auf jedem Intervall gibt man sich ein Polynom dritten Grades vor, $s_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, das folgenden Bedingungen genügen muss:

$$\begin{aligned} s_i(x_{i-1}) &= y_{i-1} \\ s_i(x_i) &= y_i \\ s_i'(x_i) &= s_{i+1}'(x_i) \\ s_i''(x_i) &= s_{i+1}''(x_i) \\ s_1''(x_0) = s_n''(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Definieren Sie $h_i := x_i - x_{i-1}$ und machen Sie den Ansatz

$$s_i(x) = \frac{\alpha_i(x - x_{i-1})^3 + \alpha_{i-1}(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\alpha_i\right)(x - x_{i-1}) + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}\alpha_{i-1}\right)(x_i - x)$$

mit zunächst unbekannten Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$. Welche der obigen Gleichungen sind nun automatisch erfüllt? Formulieren Sie die übrigen Bedingungen als lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten α_i und zeigen Sie, dass dieses eindeutig lösbar ist.

(b) Approximieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$ mit den Stützstellen $x = 0, \pm 1, \pm 2$ durch kubische Splines.

(c) Berechnen Sie zum Vergleich das Interpolationspolynom vom Grad 4 an den vorgegebenen Stützstellen und plotten Sie alle drei Funktionen in ein Diagramm.

$*$ *Diese Aufgabe ist eine freiwillige Zusatzaufgabe und dient zur selbständigen Vertiefung des Stoffes. Sie wird nicht korrigiert und zählt nicht zum Gesamtpool der Aufgaben.*

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 31.05.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.