Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
31. Mai 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 7

Aufgabe 27: Determinanten

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Welche sind folglich invertierbar?

(a) A_ξ aus Aufgabe 25,

(b) eines beliebigen Elements aus SO(2),

(c) von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28: Permutationen

Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ nennt man eine Permutation. Die Menge S_n aller solcher Abbildungen heißt symmetrische Gruppe oder Permutationsgruppe.

(a) Machen Sie sich klar, dass S_n mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe bildet. Bestimmen Sie die Mächtigkeit von S_n.

(b) Weiter definieren wir für jedes $\pi \in S_n$ einen Endomorphismus $L_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$L_\pi(x_1, \dots, x_n) := (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Werte kann $\operatorname{sgn}(\pi) := \det(L_\pi)$ annehmen? Welchen Wert hat $\operatorname{sgn}(\sigma_{ij})$, wobei $\sigma_{ij} \in S_n$ die Vertauschung von i und j ist, also

$$\sigma_{ij}(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \end{cases}.$$

(c) Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \operatorname{sgn}(\pi_2)\operatorname{sgn}(\pi_1)$.

Aufgabe 29: Leibnizsche Formel

Beweisen Sie die Leibnizsche Formel für die Determinante einer Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n, \mathbb{K})$:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die rechte Seite eine Determinantenform definiert.

Aufgabe 30: Determinanten und Zeilenstufenform

(a) Zeigen Sie, dass die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

(b) Wie verändert sich der Wert einer Determinante bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen?
Berechnen Sie die folgende Determinante, indem Sie sie durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf Dreiecksgestalt bringen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 7.6.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.