Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
7. Juni 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 8

Aufgabe 31: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen

Diagonalisieren Sie die Matrix $A \in M(3,\mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$ für die das möglich ist. Bestimmen Sie dazu Eigenwerte und Eigenvektoren von A und geben Sie dann eine Transformationsmatrix S explizit an, welche A mittels $S^{-1}AS$ in Diagonalgestalt bringt.

Aufgabe 32: Die Spur

Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n,\mathbb{K})$ ist definiert durch $\operatorname{Spur}(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$ für alle $A, B \in M(n,\mathbb{K})$ gilt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass ähnliche Matrizen und somit alle Matrixdarstellungen eines Endomorphismus $L : V \to V$ eines n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraums V dieselbe Spur haben, die wir dann ebenfalls mit $\operatorname{Spur}(L)$ bezeichnen.

(c) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und geometrischen Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_r$. Drücken Sie $\operatorname{Spur}(L)$ und $\det(L)$ durch die Eigenwerte von L aus.

Aufgabe 33: Verschiedenes zu Eigenwerten

Sei $A \in M(n,\mathbb{C})$ und λ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenraum $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ der Dimension k. Zeigen Sie:

(a) λ ist ein Eigenwert von A^T mit geometrischer Vielfachheit k.

(b) Sei A regulär, dann ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} ist Eigenwert von A^{-1}. Geben Sie den zugehörigen Eigenraum $E_{\lambda^{-1}}$ von A^{-1} an.

(c) Sei A nilpotent, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $A^m = 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt $\lambda = 0$. Wie sieht also das charakteristische Polynom einer nilpotenten Matrix über $\mathbb{C}$ aus?

Aufgabe 34: Inverse Matrix als Polynom in A

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton, dass die Inverse A^{-1} einer invertierbaren Matrix $A \in M(n,\mathbb{K})$ durch ein Polynom in A vom Grad $n-1$ gegeben ist, also $A^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j$ für geeignete $c_j \in \mathbb{K}$.

Aufgabe 35: Kommutator und gemeinsame Diagonalisierbarkeit

Seien $A, B \in M(n,\mathbb{K})$ diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass

$$AB = BA \quad \Leftrightarrow \quad A, B \text{ sind simultan diagonalisierbar,}$$

es also eine invertierbare Matrix $S \in M(n,\mathbb{K})$ gibt, so dass SAS^{-1} und SBS^{-1} Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe 36: Gerschgorin-Kreise und Diagonaldominanz*

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ eine quadratische Matrix mit Einträgen a_{ij}. Zu jeder Zeile $j = 1, \ldots, n$ definiert man den zugehörigen Gerschgorin-Kreis

$$S_j = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a_{jj}| \leq r_j\}$$

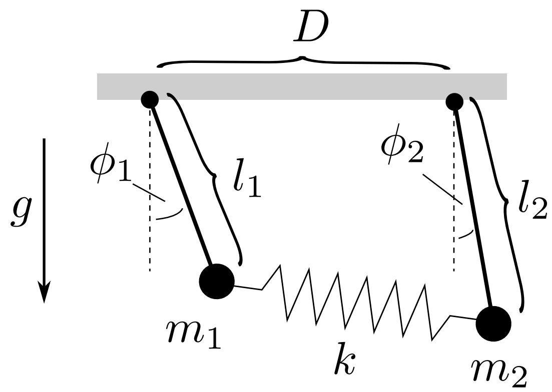
mit

$$\text{Mittelpunkt } a_{jj} \qquad \text{und} \qquad \text{Radius } r_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ji}| \,.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $\cup_{j=1}^{n} S_j$ alle Eigenwerte von A enthält. Folgern Sie daraus, dass strikt diagonaldominante Matrizen invertierbar sind. Eine Matrix heißt strikt diagonaldominant, wenn für alle Zeilen $r_j < |a_{jj}|$ gilt. Gelten die entsprechenden Aussagen auch wenn man die Rolle von Zeilen und Spalten vertauscht?

Aufgabe 37: Gekoppelte Pendel*

Betrachten Sie den nebenstehenden Aufbau: Zwei Massen m_1 und m_2 im Einfluss des Schwerefeldes sind an starren masselosen Stangen der Längen l_1 und l_2 im Anstand D aufgehängt und können reibungsfrei schwingen. Sie sind durch eine ebenfalls masselose Feder der Federkonstante k verbunden. Die Ruhelänge der Feder entspricht genau dem Abstand der Massen in der Ruhelage $\phi_1 = \phi_2 = 0$.



Leiten Sie zunächst die Bewegungsgleichung für die beiden Winkel ϕ_1 und ϕ_2 her. Lösen Sie nun die Bewegungsgleichungen für den Fall $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2$ und für kleine Auslenkungen. Linearisieren Sie dazu die Bewegungsgleichungen, d.h. entwickeln Sie zunächst $\sin\phi \approx \phi$ und $\cos\phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2}$ und behalten Sie nur Terme linear in ϕ_1 oder ϕ_2. Dann lösen Sie die entstehende Gleichung

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1(t) \\ \ddot{\phi}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix}$$

indem Sie die Matrix A diagonalisieren. Was sind also die "Normalmoden" des Systems und die zugehörigen Frequenzen?

* *Diese Aufgaben sind freiwillige Zusatzaufgaben und dienen zur selbständigen Vertiefung des Stoffes. Sie werden nicht korrigiert und zählen nicht zum Gesamtpool der Aufgaben.*

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 21.06.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.