Stefan Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019
21. Juni 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsblatt 9

Aufgabe 38: Parallelogrammgleichung und Polarisation

Zeigen Sie jeweils:

(a) In jedem Skalarproduktraum gilt die Parallelogrammgleichung

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|u\|^2. \tag{1}$$

(b) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Skalarproduktraum. Dann gilt die Polarisationsidentität

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) . \tag{2}$$

(c) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Skalarproduktraum. Dann gilt die Polarisationsidentität

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + \mathrm{i}\|u-\mathrm{i}v\|^2 - \mathrm{i}\|u+\mathrm{i}v\|^2\right) . \tag{3}$$

Bemerkung: Eine Norm ist genau dann durch ein Skalarprodukt gegeben, wenn die Parallelogrammgleichung gilt. Genauer: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ in dem (1) gilt. Dann wird durch (2) bzw. (3) ein Skalarprodukt definiert. (Wer Lust hat, kann versuchen, das auch zu zeigen.)

Aufgabe 39: L^2-Skalarprodukt

Zeigen Sie, dass auf dem Funktionenraum $C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ der stetigen komplex-wertigen Funtionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ durch

$$\langle u, v\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)}v(x)\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt definiert wird. Zeigen Sie weiter, dass die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ein Orthonormalsystem bilden.

Aufgabe 40: Gram-Schmidt Verfahren

(a) Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{R}^2$ durch $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle := 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und das oben definierte Skalarprodukt durch.

(b) Betrachten Sie den Raum $C([-1,1],\mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle u,v\rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Indem man auf die Folge der Monome $u_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, das Orthonormalisierungsverfahren nach Gram und Schmidt anwendet, erhält man eine Orthonormalfolge $(v_0, v_1, \ldots)$. Bestimmen Sie v_0, v_1, v_2 und v_3. Die Legendre-Polynome P_n ergeben sich, wenn man statt der Normierung $\langle v_n, v_n\rangle = 1$ fordert, dass $P_n(1) = 1$. Es ist also $P_n = \frac{v_n}{v_n(1)}$.

Aufgabe 41: Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter setzen wir für einen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$, $a \cdot \sigma := a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3 \in M(2,\mathbb{C})$ und definieren den Raum $\mathfrak{su}(2) := \{A \in M(2,\mathbb{C}) \,|\, A = a \cdot \sigma,\ a \in \mathbb{R}^3\}$, den wir als Vektorraum über $\mathbb{R}$ auffassen.

Zeigen Sie, dass

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}^3} E_2 + \mathrm{i}(a \times b) \cdot \sigma$$

gilt, wobei $a \times b$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichne und $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$ das euklidische Skalarprodukt. Nun definieren wir ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$ durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{su}(2)} : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{R}, \qquad \langle A, B\rangle_{\mathfrak{su}(2)} = \tfrac{1}{2}\mathrm{Spur}(AB).$$

Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathfrak{su}(2)$, $a \mapsto a \cdot \sigma$ ein isometrischer Isomorphismus ist, also dass ϕ eine lineare Bijektion ist und

$$\langle a \cdot \sigma, b \cdot \sigma\rangle_{\mathfrak{su}(2)} = \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}^3} \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}^3$$

erfüllt.

Abgabe: Bis spätestens 8.00 Uhr am Freitag den 28.06.2019 im Briefkasten Ihres Tutors bzw. Ihrer Tutorin. Die Briefkästen befinden sich im Gebäude C, Raum links vom Eingang in Ebene 3.