S. Teufel
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2019

Mathematik für Physiker 2 / Lineare Algebra 1

Übungsaufgaben zur Klausur

Die folgenden Übungsaufgaben können **zusätzlich** zu den wöchentlichen Hausaufgaben und zum Vorlesungsskript zur Vorbereitung auf die Klausur dienen. Während in der Klausur ähnliche Aufgabentypen abgefragt werden, ist es **nicht** ausreichend, nur die hier gestellten Beispiele durchzuarbeiten.

Aufgabe 1: Grundlegendes Verständnis

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage unter den gegebenen Bedingungen wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt $0,5$ Punkte, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt $-0,5$ Punkte. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. **Achtung:** Wenn nicht eindeutig erkennbar ist, ob bzw. welche Antwort angekreuzt wurde, wird die jeweilige Aufgabe mit $-0,5$ Punkten bewertet.

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension n. Dann folgt:

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ V besitzt eine Basis aus n Vektoren.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jede Basis von V besteht aus n Vektoren.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ V besitzt genau eine Basis aus n Vektoren.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Je n linear unabhängige Vektoren aus V bilden eine Basis von V.

Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Dann folgt:

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det A \neq 0$.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det A > 0$.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\mathrm{Rang} A = n$.

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Welche Aussagen über die lineare Gleichung $Ax = b$ sind dann korrekt?

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $Ax = b$ hat immer mindestens eine Lösung.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Lösungsmenge von $Ax = b$ ist immer ein Untervektorraum.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $Ax = b$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $n = m$ gilt.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $Ax = b$ hat mindestens eine Lösung, wenn $m < n$ gilt.

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen sind dann korrekt?

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ A ist selbstadjungiert
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ A ist unitär.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ A ist eine Projektion.
$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ A ist invertierbar.

Aufgabe 2: Bestimmen Sie jeweils den Rang der Matrizen A und B, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: "Bestimmen" meint, dass Ihr Lösungsweg einschließlich aller Rechnungen und Argumente nachvollziehbar sein muss, allerdings kein formaler Beweis gefragt ist.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist C folglich invertierbar? Bestimmen Sie C^{-1} für diese Werte von λ. Machen Sie eine Probe, indem Sie $C\,C^{-1}$ berechnen.

Aufgabe 4: Geben Sie jeweils die Determinante der Matrizen A, B und C an, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wenn Sie etwas "angeben" sollen, zählt nur das richtige Ergebnis; ein Lösungsweg oder eine Begründung sind dann nicht gefragt.

Aufgabe 5: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

indem Sie eine orthogonale Matrix S und eine Diagonalmatrix D so bestimmen, dass

$$S^{-1} G S = D\,.$$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die Matrix $\exp(G)$, wobei G die Matrix aus Aufgabe 5 ist. Verwenden Sie dazu entweder Ihr Resultat aus Aufgabe 5, oder summieren Sie direkt die Exponentialreihe.

Aufgabe 7: Formulieren Sie die Dimensionsformel für Unterräume.

Bemerkung: Wenn Sie eine Aussage oder eine Definition "formulieren" sollen, dann kommt es auf eine korrekte, präzise und vollständige Formulierung an. Es ist aber unerheblich, ob die Formulierung wörtlich diseselbe wie im Skript ist.

Korrekte Lösungen dieser Aufgabe wären beispielsweise:

"Für alle Untervektorräume U, W eines Vektorraums V gilt
$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$."

"Seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Dann folgt, dass
$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$."

Unvollständige Lösungen wären beispielsweise:

"$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$."

"U, W Unterräume $\Rightarrow \dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$."

Aufgabe 8: Beweisen oder widerlegen Sie jeweils, dass die folgenden Abbildungen linear sind:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 - x_3)$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \max\{x_1, x_2, x_3\}$

Bemerkung: Widerlegen lässt sich eine Aussage oft am einfachsten durch ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 9: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei L ein Endomorphismus von V. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $\mathrm{Kern}(L) \cap \mathrm{Bild}(L) = \{0\}$

(ii) $\mathrm{Kern}(L \circ L) = \mathrm{Kern}(L)$

Bemerkung: Wenn ein formaler Beweis gefragt ist, müssen sowohl die Gesamtstruktur als auch die einzelnen Schritte klar nachvollziehbar und korrekt sein. Sie dürfen dabei (falls nicht anders angegeben) die in der Vorlesung bewiesenen Aussagen verwenden.