Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2019

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 3 (Abgabe am 09.05.2019)

Aufgabe 11 (20 Punkte)
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden DGLn.

a) $y'' + 8y' + 15y = \mathrm{e}^{-2x}$
b) $y'' + 8y' + 15y = \mathrm{e}^{-5x}$
c) $y'' + 4y' + 13y = \sin x$
d) $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{-3x}$

Aufgabe 12 (10 Zusatzpunkte)
Wir betrachten das AWP $\quad y'(x) = -y(x) - 1, \quad y(0) = -2.$

a) Lösen Sie das AWP (wie in früheren Aufgaben).
b) Bestimmen Sie alle Picard-Iterierten $y_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, für das AWP.
c) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ und vergleichen Sie mit Teil (a).

Hinweis: Berechnen Sie in Teil (b) zunächst, $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ und $y_3(x)$. Raten Sie davon ausgehend, wie $y_n(x)$ aussehen könnte. Beweisen Sie dann Ihre Vermutung.

Aufgabe 13 [2] (6 Punkte)
Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}' = D_\phi\, \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Drehung des Vektors $\vec{x}$ um den Winkel ϕ.

a) Illustrieren Sie dies für $\phi = \frac{\pi}{4}$ und die Vektoren $(2,0)^T$ und $(-1,1)^T$ mit einer Zeichnung.
b) Zeigen Sie: $D_\phi^{-1} = D_\phi^T = D_{-\phi}$ (d.h. $\vec{x} = D_{-\phi}\, \vec{x}'$).

[2] Diese Aufgabe wiederholt die Matrix-Vektor-Multiplikation aus dem Wintersemester.

Aufgabe 14 [3] (vgl. `http://spikedmath.com/517.html`) (10 Zusatzpunkte)
Wir definieren eine Hyperbel als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, genannt Brennpunkte, gleich ist. Als Brennpunkte wählen wir $(\pm f, 0)$ und als Betrag der Differenzen der Abstände $2a$ mit $0 < a < f$.

a) Drücken Sie die in der Definition genannte Bedingung, die die Punkte (x, y) erfüllen müssen, als eine Gleichung aus (die dann die Parameter f und a enthält).
b) Bringen Sie die Gleichung aus (a) auf die Form
$$\frac{x^2}{\dots} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$
Drücken Sie $b > 0$ als Funktion von f und a aus.
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der x-Achse.
d) Bestimmen Sie $m := \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{|y|}{|x|}$ für Punkte (x, y) auf der Hyperbel.
Welche Rolle spielen die Geraden $y = \pm mx$ beim Zeichnen der Hyperbel?
e) Zeichnen Sie die Hyperbel für $f = 5$ und $a = 4$.

Aufgabe 15 (4 Zusatzpunkte)
Üben Sie bis spätestens 02.06.19 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Center & radii of ellipses from equation* und
- *Ellipse standard equation & graph*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

[3] Diese Aufgabe bezieht sich nicht auf den aktuellen Vorlesungsstoff, sondern kann mit elementaren Methoden vollkommen unabhängig von der Vorlesung bearbeitet werden. Wir werden aber im Laufe des Semesters auf diese Aufgabe zurückkommen.