

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 4 (Abgabe 16.05.2019)

Aufgabe 16

(20 Punkte)

- a) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem jeweils an, ob die Matrix diagonalisierbar ist.

- b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix D_ϕ aus Aufgabe 13 sowie alle zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 17

(10 Punkte)

Wir möchten die folgende Menge zeichnen,

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{5}{8}(x^2 + y^2) + \frac{3}{4}xy = 1 \right\}.$$

- a) Drücken Sie dazu zunächst die Bestimmungsgleichung in den gedrehten Koordinaten $(x', y')^T = D_\phi \vec{x}$ aus (D_ϕ wie in Aufgabe 13), und wählen Sie ϕ so, dass kein Term proportional zu $x'y'$ auftritt.
- b) Zeichnen Sie E in einem xy -Koordinatensystem. Tragen Sie dazu zunächst das gedrehte $x'y'$ -Koordinatensystem ein.

HINWEIS: Die Gleichung $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ beschreibt eine Ellipse, vgl. Aufgabe 9.

BEMERKUNG: Wir werden bald lernen, wie man dieselbe Aufgabe mithilfe von Eigenwerten und Eigenvektoren löst. Hier wird das jedoch nicht benötigt und soll auch nicht verwendet werden!

Aufgabe 18

(10 Zusatzpunkte)

Wir möchten alle Lösungen $y(x)$ der DGL⁴

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y'' + 4y' + 4y = 2x + 19$$

finden. Dazu betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung und machen den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

- Welche Gleichung muss λ erfüllen?
- Welche λ lösen diese Gleichung? HINWEIS: $\lambda = i$ ist darunter.
- Geben Sie dementsprechend 4 linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung an.
HINWEIS: Eine doppelte Lösung der Bestimmungsgleichung für λ behandeln Sie wie bei DGLn zweiter Ordnung.
- Raten Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
- Geben Sie die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung an.

Aufgabe 19

(2 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 30.06.19 auf www.khanacademy.org die *Skill*

- Vertices & direction of a hyperbola.*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

⁴Zur Erinnerung: $y^{(2)} = y''$