Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2019

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 6 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Mi 29.05.2019, 12:00,** in die Mappen vor C4P31)

Aufgabe 25 (keine Abgabe)
Gegeben sei die quadratische Form ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x+z) + 2axz\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?

Aufgabe 26 (10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Seien weiter $f, q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = \mathrm{e}^{xyz} + (x-y)\sin(xz)$ und $q(\vec{x}) = \langle \vec{x}, A\vec{x}\rangle$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z.
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen q_x, q_y und q_z.

Aufgabe 27 (keine Abgabe)
Sei $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$. Berechnen Sie f_x und f_y sowie $x\, f_x(x, y) + y\, f_y(x, y)$.

Aufgabe 28 (4+4+4+4+4 = 20 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}\,.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. Hinweis: $|xy| \leq x^2 + y^2$ (warum?)
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f (für $\vec{x} \neq \vec{0}$).
c) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
d) Ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig?
e) Ist f im Ursprung total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 29 (10 Zusatzpunkte)

Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{$*$}$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Aufgabe 22). Definieren Sie dazu

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} ,$$

und suchen Sie eine Matrix A, so dass $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare), sehen Sie wie? Schreiben Sie nun die DGL aus Aufgabe 18 als DGL-System 1. Ordnung. (Eine Inhomogenität in der Ausgangs-DGL führt auch zu einer Inhomogenität im DGL-System.) Vergleichen Sie auch hier das charakteristischen Polynom der DGL mit dem charakteristischen Polynom der im DGL-System auftretenden Matrix.