

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 7 (Abgabe 06.06.2019)

Aufgabe 30

(3+3+3+6 = 15 Punkte)

Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 26.

- Für welche \vec{x} sind f und q total differenzierbar? Geben Sie ∇f und ∇q an.
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0, 1)^T$ in Richtung von $(1, 1, 1)^T$.
- Bestimmen Sie die Richtungsableitung von q an der Stelle $\vec{x}_0 = (0, 0, 1)^T$ in Richtung von $(0, 1, 0)^T$.
- Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen und geben Sie die Hesse-Matrizen $f''(\vec{x})$ und $q''(\vec{x})$ an.

Aufgabe 31

(3+3+3 = 9 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases} .$$

- Bestimmen Sie $g_x(0, 0)$ und $g_y(0, 0)$.
- Berechnen Sie g_x und g_y für $(x, y) \neq (0, 0)$.
- Bestimmen Sie $g_{xy}(0, 0)$ und $g_{yx}(0, 0)$.

Aufgabe 32

(10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f} d\vec{x}$, $j = 1, 2, 3$, für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ und die Wege

- $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,
- $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und
- \mathfrak{K}_3 : Die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an. Ist \vec{f} konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 33

(10 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f} \, d\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} ze^{xz} - 2x \cos(x^2 + y^2) \\ e^{-y^2} - 2y \cos(x^2 + y^2) \\ xe^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1 + 3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Zeichnen Sie außerdem \mathfrak{K}_1 .