Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2019

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 8 (Abgabe ausnahmsweise bis spätestens **Mi 19.06.2019, 12:00,** in die Mappen vor C4P31)

Aufgabe 34 (3+4+3= 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{-y^2}}{1-x^2}$ um $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y,z) = \cosh(x) - \sin(yz) - xy(z-1)^{19}$ und $g(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^x - y}{1+x^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(0,-1,1)$ von

$$f(x,y,z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + z + 19\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 35 (8+7 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = (x-y)^4 - 7(x^2+y^2) + 18xy \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = (x^2 - x^4) + \sin(y)\,,$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 36 (keine Abgabe)

Wenn wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können wir auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.
Man definiert für $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T$ und analog $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation).}$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\operatorname{div}\vec{f}$, $\operatorname{rot}\vec{f}$, $\operatorname{grad} V$, $\operatorname{div}\operatorname{grad} V$ und $\operatorname{rot}\operatorname{grad} V$ für

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x - z\cos z \\ x\sin(yz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Die folgenden beiden Aufgaben sind **Ergänzungsaufgaben** mit deren Hilfe zurückliegende Themen wiederholt werden können. Diese Aufgaben werden nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.

Aufgabe 37 (2+3+5 = 10 Zusatzpunkte)

Wir möchten das AWP

$$y' = \frac{3y}{x} - y^2 - \frac{3}{x^2}\,, \qquad y(2) = \tfrac{7}{6}$$

lösen.

a) Rechnen Sie nach, dass $y(x) = \frac{1}{x}$ die DGL löst (aber nicht das AWP).

b) Nun definieren wir u durch

$$y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{u(x)}\,.$$

Welche DGL muss u erfüllen, damit y die Ausgangs-DGL löst?

c) Lösen Sie die DGL für u, und bestimmen Sie damit die Lösung das ursprünglichen AWPs.

Aufgabe 38 (Fibonacci-Zahlen) (10 Zusatzpunkte)

Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ \forall\ n \geq 2$. Sei weiter

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}\,.$$

a) Finden Sie eine 2×2-Matrix A, so dass $\vec{b}_{n+1} = A\,\vec{b}_n$.

b) Berechnen Sie A^n (durch HAT) und bestimmen Sie damit $\vec{b}_n$ sowie a_n explizit.