Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2019

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 9 (Abgabe am 27.06.2018)

Aufgabe 39 (10 Punkte)
Ist $y + xy^2 - \mathrm{e}^{xy} = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 0$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(0)$.

Aufgabe 40 (10 Punkte)
Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 + \cos(y_1 y_2) &= y_2 x_1 + 1 \\ \sin y_1 &= x_2 + y_2 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, -1, 0, 1)$ nach $\vec{y} = f(\vec{x})$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

auflösen lässt, und berechnen Sie $f'(0, -1)$.

Aufgabe 41 (10 Zusatzpunkte)
Für Umgebungen welcher Punkte (x_0, y_0) lässt sich die Gleichung

$$y^2 = x^3 + x^2$$

jeweils lokal nach y auflösen? Und wo lässt sie sich lokal nach x auflösen? Illustrieren Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll in einem Diagramm.

Aufgabe 42 (10 Punkte)
Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[5] Berechnen Sie auch $f^{-1\prime}(-8, 0, 0)$; geben Sie an, welchen Zweig Sie dabei gewählt haben.

---

[5] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} r(x, y, z) \\ \vartheta(x, y, z) \\ \varphi(x, y, z) \end{pmatrix}$?