Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2019

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 11 (Abgabe am 11.07.2019)

Aufgabe 48 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumen $|E| = \int_E \mathrm{d}V$ des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ .$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ positiv definit und $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle \le 1\}$. Bestimmen Sie $|K|$.
Hinweis: Laut Satz 25 existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $U^T A U$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich also an.

Aufgabe 49 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z: \text{ kartesisch}),$$

b) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le z \le 9 \right\} .$$

und zeichnen Sie P.

Aufgabe 50 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 4 , \; z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S ohne Verwendung eines Integralsatzes.
Hinweis: Ebene Polarkoordinaten, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 51 (10 Zusatzpunkte)

Berechnen Sie das Volumen des Torus[7]

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r\sin u)\cos v \\ (1 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} \,,\; 0 \le r \le \tfrac{1}{2} \,,\; 0 \le u < 2\pi \,,\; 0 \le v < 2\pi \right\} ,$$

d.h. berechnen Sie $\int_T \mathrm{d}V$, und seine Oberfläche, d.h. $\int_{\partial T} \mathrm{d}O$, wobei

$$\partial T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{2}\sin u)\cos v \\ (1 + \frac{1}{2}\sin u)\sin v \\ \frac{1}{2}\cos u \end{pmatrix} \,,\; 0 \le u < 2\pi \,,\; 0 \le v < 2\pi \right\} .$$

Aufgabe 52 (Wiederholung: Summen, Reihen, Integrale)[8] (20 Zusatzpunkte)

Sei (für $p, \lambda, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \,, \qquad P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \,, \qquad f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,.$$

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b(k; n, p) \,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k\, b(k; n, p) \,, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\, b(k; n, p) \,,$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda) \,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\, P(k; \lambda) \,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k^2\, P(k; \lambda) \,,$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x \,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x \,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_{\mu,\sigma^2}(x)\,\mathrm{d}x \,,$

Hinweis: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \,,$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu_1,\sigma_1^2}(y)\, f_{\mu_2,\sigma_2^2}(x-y)\,\mathrm{d}y \,,$ Ergebnis: $f_{\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x)$.

Aufgabe 53 (Vorschau: Stochastik) (12 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 21.07.19 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Basic set notation*,
- *Subsets of sample spaces*,
- *Simple probability*,
- *Probabilities of compound events*,
- *Independent probability* und
- *Dependent probability*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

---

[7] vgl. Aufgaben 23 & 44. (Zusatzaufgaben werden evt. nicht oder nicht vollständig in den Übungsgruppen besprochen.)

[8] Diese Aufgabe kann bis zum 18.07.2019 abgegeben werden. Die Aufgabe wird nicht in den Übungen besprochen. Wir helfen aber gerne bei der Bearbeitung, wenn Sie z.B. Fragen oder Lösungsansätze im Webforum posten.