Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 12 (Abgabe 18.07.2019)

Aufgabe 54 (10 Punkte)
Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = \vec{x}$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = (\sin z, x, y^2)^T$ durch die Oberfläche des Torus T aus den Aufgaben 23, 44 und 51.

Aufgabe 55 (10 Zusatzpunkte)
Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R.

a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{\partial K} \vec{f}\, d\vec{O}$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).

b) Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{f}$.

c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K \operatorname{div}\vec{f}\, \mathrm{d}V$ für $\alpha < 3$.

d) Bilden Sie den Limes $\alpha \to 3$ für $\operatorname{div}\vec{f}$ und berechnen Sie $\int_K \big(\lim\limits_{\alpha\to 3} \operatorname{div}\vec{f}\,\big)\, \mathrm{d}V$.
Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus Teil (a) für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 56 (10 Punkte)
Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + z \\ \tanh y \\ \sin y - 3x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 3\cos t \\ 8 \\ 3\sin t - 1 \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Aufgabe 57 (10 Punkte)

Beim Spiel Würfelzwerge von Selecta gibt es Kärtchen, auf denen Zwerge mit drei Kleidungsstücken (Mütze, Jacke und Hose) dargestellt sind. Die Kleidungsstücke kommen in 6 unterschiedlichen Farben (rot, gelb, grün, blau, lila und pink) vor. Man würfelt mit drei Farbwürfeln und muss schnell einen Zwerg finden, der Kleidung in der entsprechenden Farbkombination trägt. Zu jeder möglichen Farbkombination gibt es genau einen Zwerg, d.h., wenn es einen Zwerg mit gelber Mütze, gelber Jacke und blauer Hose gibt, dann kann es keinen mit gelber Mütze, blauer Jacke und gelber Hose geben, aber sehr wohl noch einen mit gelber Mütze, blauer Jacke und blauer Hose.

a) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit fairen Farbwürfeln die Kombination für einen ein-, zwei- oder dreifarbigen Zwerg zu würfeln?
b) Wieviele ein-, zwei- und dreifarbige Zwerge gibt es jeweils?
c) Wieviele Kärtchen hat das Spiel?

Aufgabe 58 (10 Zusatzpunkte)

Wir zeigen: Sind die Ereignisse A_j, $j = 1, \ldots, n$ paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)\,P(A_k) \quad \forall\ j \neq k$$

so folgt daraus **nicht** $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod\limits_{j=1}^{n} P(A_j)$.

Beispiel: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse
$A_1 =$ "der erste Wurf liefert eine gerade Zahl",
$A_2 =$ "der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl" und
$A_3 =$ "die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade".
Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 59 (10 Punkte)

Eine Krankheit trete bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

> *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig ausgewählten, getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?*

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Geben Sie wie beim Gefangenenparadoxon aus der Vorlesung eine geeignete Ergebnismenge Ω an.

Bezeichnen Sie mit A_1 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit hat, mit A_2 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also $A_2 = A_1^C$) und mit B das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt.

b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.
c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Satzes von Bayes.
d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.