Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2019

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 26.07.2019

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 104 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x+3}{x^2 - x^4} \,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' + xy^2 \log x = 0,\ y(1) = 1$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' - 2y' - 3y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' - 2y' - 3y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -3$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' - 2y' - 3y = -12\mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 4 (7+2+3 = 12 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.
c) Bestimmen Sie $A^4 - 5A^2$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und sei $\lambda \neq 0$ Eigenwert von AB. Zeigen Sie, dass λ dann auch Eigenwert von BA ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$5xy - \frac{3}{2}(x^2 + y^2) = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x, y) = xy\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\,,$$

d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = (0, 0)$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 8 (4+4+4 = 12 Punkte)
Sei $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0, 2\pi)$ und

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cos y \\ \mathrm{e}^x \sin y \end{pmatrix}.$$

a) Für welche (x, y) ist f lokal umkehrbar?
b) Bestimmen Sie $f^{-1}(-1, 0)$.
c) Berechnen Sie $f^{-1\prime}(-1, 0)$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)
Sei $B = [0, 1]^2$ das Einheitsquadrat mit (stückweise) parametrisiertem Rand ∂B so, dass B im Uhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y\cos(2\pi x) \\ x^2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\int_{\partial B} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$. Hinweis: Ein Integralsatz ist hilfreich.

Aufgabe 10 (2+2+4+4 = 12 Punkte)
Bei einem Radrennen werden Dopingtests durchgeführt. Ist ein Fahrer gedopt, so fällt der Test mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv aus. Ebenso fällt er bei einem ungedopten Fahrer mit Wahrscheinlichkeit 90% negativ aus.

a) Ein gedopter Sportler werde zweimal getestet.
   (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Tests positiv ausfallen?
   (ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der Tests positiv ausfällt?
b) Bei dem Rennen seien 20% der Fahrer gedopt. Bei einem zufällig ausgewählten Fahrer wird ein Dopingtest durchgeführt. Dieser falle positiv aus.
   (i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fahrer gedopt ist?
   (ii) Bei diesem Fahrer werde ein zweiter Test durchgeführt. Dieser falle ebenfalls positiv aus. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Fahrer gedopt ist?