Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2019

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 15.10.2019

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 103 Punkte erreichbar, 84 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 42 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_0^\infty (x\,\mathrm{e}^{-x})^2\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{x^2+3}{x^4-x^2}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $xy' = \mathrm{e}^{-y}$, $y(1) = 0$.

Aufgabe 3 (4+2+3 = 9 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 3y = 0$.

b) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 3y = 9$.

c) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 3y = 9$, $y(0) = 3$, $y'(0) = \sqrt{2}$.

Aufgabe 4 (7+2+3 = 12 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren von A.

b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.

c) Bestimmen Sie $(A^4 - 2A^3 - 2A)\vec{x}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch, und sei A positiv semidefinit. Zeigen Sie, dass BAB ebenfalls positiv semidefinit ist.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

$$3xy + \frac{5}{2}(x^2 + y^2) = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x, y) = (x - y)^4 + 8xy\,,$$

d.h. alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $(\nabla f)(x, y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Hinweis: Es ist sinnvoll, $f_x(x, y) + f_y(x, y)$ zu betrachten.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x, y) = y^3 + y - x^3 + x$. Ist die Gleichung $F(x, y) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) mit $x_0 = 1$ und geeignetem y_0 nach $y = f(x)$ auflösbar? Berechnen Sie ggf. auch $f'(1)$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T$ und $f(\vec{x}) = z^2$. Berechnen Sie

$$\int_{|\vec{x}|=\frac{1}{2}} f \;\mathrm{d}O\,.$$

Aufgabe 10 (4+6+4=14 Punkte)

Bei einer Kunstausstellung werden 12 Gemälde gezeigt, unter denen sich (unerkannt) zwei Fälschungen befinden. Eine Kunstsammlerin wählt zufällig ein Bild aus (jedes mit gleicher Wahrscheinlichkeit), befragt aber, bevor sie es kauft, eine Expertin. Diese erkennt sowohl Originale als auch Fälschungen mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{9}{10}$. Wenn die Expertin das Bild für eine Fälschung hält, wählt die Sammlerin ein anders Bild aus (wieder jedes der übrigen 11 mit gleicher Wahrscheinlichkeit).

Wir definieren die Ereignisse

$F =$ "Das erste gewählte Bild ist eine Fälschung."

$E =$ "Die Expertin hält das zuerst gewählte Bild für eine Fälschung."

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(F)$ und $P(F^C)$ sowie die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(E|F)$ und $P(E|F^C)$ an.
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein von der Expertin als Fälschung deklariertes Bild ein Original, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine Fälschung?
c) Wenn ein zweites Bild ausgewählt wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dieses dann ein Original?