Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 10 — Montag, 6. Juli 2020

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$, dann gilt $f(x) = \exp_a(x)$.

Aufgabe 2 (2 + 1 + 1 Punkte)

1. Zeigen Sie das folgende Additionstheorem für den Tangens:
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$
wobei $x, y, x+y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.
2. Folgeren Sie unter der Voraussetzung, dass $\arctan(x) + \arctan(y)$ im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ liegt, das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:
$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$
3. Zeigen Sie die Gleichung
$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)
Seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ auf U n-fach differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie:

1. $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$ ist n-fach differenzierbar und die n-te Ableitung erfüllt für alle $x \in U$ die Gleichung
$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x).$$
2. Es gilt für alle $x \in U$
$$f(x) \cdot g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (f^{(k)} \cdot g)^{(n-k)}(x).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Überprüfen Sie die Funktionen
$$f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x^n \cdot \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$
für $n \in \{0, 1, 2\}$ auf Stetigkeit in 0, Differenzierbarkeit in 0 und stetige Differenzierbarkeit auf $[0, \infty)$.

Abgabe bis zum 13. Juli 2020 um 12:00.