

# Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

## Übungsblatt 11

Montag, 13. Juli 2020

### Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

- Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  den Definitionsbereich  $U$  und berechnen Sie ihre Ableitung:

a)  $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \arctan(x)$ .

b)  $f(x) = \frac{1 + \cos(x)}{1 - \cos(x)}$ .

- Berechnen Sie alle Extrema der Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$ .

### Aufgabe 2 (2 + 1 + 1 Punkte)

- Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \cos(x) - x}{4x^2 + x^3}$       (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right), x > 1$

- Berechnen Sie das vierte Taylorpolynom  $T_{f,0}^4$  mit Entwicklungspunkt  $a = 0$  für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{4x^4+x}.$$

Hinweis: Mit etwas Überlegung braucht man hier keine Ableitung zu berechnen!

### Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

- Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom  $T_{\arctan,0}^3$ .
- Benutzen Sie  $T_{\arctan,0}^3$  und Aufgabe 2 auf Blatt 10, um  $\frac{\pi}{4}$  und damit  $\pi$  näherungsweise zu bestimmen. Zeige dabei, daß die Näherung bis auf zwei Nachkommastellen exakt ist mit  $\pi = 3,14\dots$

### Aufgabe 4 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- Für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  gibt es Polynome  $p_n(x)$  und  $q_n(x) = x^{3 \cdot 2^{n-1}}$ , so daß gilt  $f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$  für  $x \neq 0$ .
- Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{x^k} = 0$ .
- Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $f^{(n)}(0) = 0$ .
- $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $T_{f,0} = 0$ .

---

Abgabe bis zum 20. Juli 2020 um 12:00.