Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 3 Montag, 4. Mai 2020

Aufgabe 1 (1 + 2 + 2 Punkte) Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(c) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Finde zudem Beispiele, bei denen in (b) und (c) die Inklusionen echt sind.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 1 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \; x \longmapsto 3x - 2$.

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : \; x \longmapsto 3x - 2$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \; (x, y) \longmapsto 5x + 3y$.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte) Zeigen Sie:

1. Ist $f : M \longrightarrow N$ eine surjektive Abbildung und $y \in N$, so ist
$$g : M \setminus f^{-1}(\{y\}) \longrightarrow N \setminus \{y\} : x \mapsto f(x)$$
eine surjektive Abbildung.
2. Ist $f : M \longrightarrow N$ eine injektive Abbildung, $x' \in M$ und $y' = f(x') \in N$ so ist
$$g : M \setminus \{x'\} \longrightarrow N \setminus \{y'\} : x \mapsto f(x)$$
eine injektive Abbildung.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass $5^n + 7$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ durch 4 teilbar ist.
2. Zeigen Sie dass $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ für alle $n \geq 2$.

Abgabe bis zum 11. Mai 2020 um 12:00.