Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 4 — Montag, 11. Mai 2020

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
Sei M eine Menge und betrachte folgende beide Mengen von Abbildungen:

$$A := \{f \mid f : \{0,1\} \to M \text{ Abbildung}\} \text{ und } B := \{g \mid g : M \to \{0,1\} \text{ Abbildung}\}.$$

Zeigen Sie:

1. A ist gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$.
2. B ist gleichmächtig zur Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.
3. Ist M abzählbar unendlich, so ist A abzählbar unendlich.
4. Ist M abzählbar unendlich, so ist B überabzählbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in M = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x_1 \neq 0 \vee x_2 \neq 0\}$. Wir definieren

$$(v_1, v_2) \sim (w_1, w_2) \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \ a \cdot v_1 = w_1 \ \wedge \ a \cdot v_2 = w_2$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist und zeichnen Sie die Äquivalenzklassen zu $(1, 1)$ und $(-2, 3)$ in die Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Ist $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine positive ganze Zahl, so definieren wir für $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \equiv y \ :\Longleftrightarrow \ x - y \text{ ist ein Vielfaches von } n.$$

Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist mit genau den n paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 1 Punkte)

1. Auf der Menge $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir eine zweistellige Operation
$$+ : G \times G \longrightarrow G : \big((x, y), (u, v)\big) \mapsto (x + u, y + v).$$
Zeigen Sie, dass $(G, +)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(0, 0)$ ist.
2. Auf der Menge $H := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0, 0)\}$ definieren wir eine zweistellige Operation
$$\cdot : H \times H \longrightarrow H : \big((x, y), (u, v)\big) \mapsto (xu - yv, xv + yu).$$
Zeigen Sie, dass $(H, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(1, 0)$ ist.
Hinweis: Beachten Sie, dass Sie auch zeigen müssen, dass $(x, y) \cdot (u, v) \in H$ für $(x, y), (u, v) \in H$.
3. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein Körper ist, wenn die Operationen "+" und "·" wie in a. und b. definiert sind.

Abgabe bis zum 18. Mai 2020 um 12:00.