Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 5 — Montag, 18. Mai 2020

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)
Sei $M = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und seien $(p,q),(p',q') \in M$. Wir definieren

$$(p,q) \sim (p',q') \quad :\Longleftrightarrow \quad p + q' = p' + q.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\overline{(p,q)} + \overline{(p',q')} := \overline{(p+p', q+q')}$$

auf $M/\sim$ eine wohldefinierte Operation $+$ definiert wird.
Zeige weiter, dass $(M/\sim, +)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x \text{ teilt } y\}$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}_0$ definiert wird. Ist R eine Totalordnung?

(b) Sei K ein Körper und $x \in K$. Zeigen Sie, dass $x^2 = 1$ genau dann, wenn $x \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)
Sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $0 < x$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so ist $0 < x^n$.

(b) Ist $0 \leq x, y$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 1$, so gilt $(x < y \iff x^n < y^n)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der folgenden Mengen:

$$A = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{und} \quad B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Abgabe bis zum 25. Mai 2020 um 12:00.