Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 6 — Montag, 25. Mai 2020

Aufgrund der Pfingstfeiertage und Fronleichnam finden die ersten Übungen im Juni erst wieder am 18.6 und 19.6 statt. Damit Sie diese Zeit gut nutzen können, ist dieses Übungsblatt etwas länger als sonst. Die optimale Punktezahl ist wieder 16 Punkte, jedoch können Sie mit diesem Blatt bis zu 8 Sonderpunkte erreichen.

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

mit üblicher Addition und Multiplikation einen Teilkörper von $\mathbb{R}$ bildet.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \left\{a + ib\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

mit Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen einen Teilkörper von $\mathbb{C}$ bildet.

Aufgabe 2 (2 + 2 Punkte)

a) Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\mathrm{Re}z$, $\mathrm{Im}z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

$$\text{(i)}\ \ z = 2i - 3 \qquad \text{(ii)}\ \ z = \frac{5-i}{5+2i} \qquad \text{(iii)}\ \ z = \frac{(1+i)^7}{(1-i)^4}$$

b) Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige die folgenden Aussagen:

$$\text{(i)}\ \ |z| \cdot |w| = |z \cdot w| \qquad \text{(ii)}\ \ z \cdot \overline{z} = |z|^2 \qquad \text{(iii)}\ \ \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \leq |z|$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) = \mathrm{Re}(a) \ \text{ und } \ \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n) = \mathrm{Im}(a)\right)$$

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}, \ldots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen.

a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

b) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 5 (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{3n^4+2n^2}{2n^5+4n^3+8}$.
2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{5n^4+2n^2}{2n^3+3} - \frac{10n+1}{4}$.
3. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.
4. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 \in [1,3)$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6 (2 + 2 Punkte)

1. Beweisen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt auch $a \geq 0$ und
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$
2. Beweisen Sie:
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{9n^2+2n+1} - 3n) = \frac{1}{3}.$$