Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 7 Montag, 15. Juni 2020

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es sich um eine konvergente Folge handelt.

(b) Bleibt die Behauptung aus Aufgabenteil (a) korrekt, wenn wir die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ voraussetzen? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2 (1 + 1 + 2 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ist konvergent.

(b) Die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ist konvergent.

(c) Die Grenzwerte von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stimmen überein.

. Wie nennen den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *Eulersche Zahl e*

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Die Berechnung der Grenzwerte im Falle der Konvergenz ist nicht erforderlich.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{in}$.

(b) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$ auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren den *Limes inferior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\left\{a \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \text{ ist Grenzwert einer Teilfolge von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}$$

und den *Limes superior* als

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\left\{a \in \mathbb{R} \;\middle|\; a \text{ ist Grenzwert einer Teilfolge von } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\}.$$

(a) Begründen Sie, weshalb die beiden Zahlen $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$ existieren und Minimum bzw. Maximum der angegebenen Menge sind.

(b) Zeigen Sie, eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und $\liminf_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n$ gilt.

Abgabe bis zum 22. Juni 2020 um 12:00.