Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 8 — Montag, 22. Juni 2020

Aufgabe 1 (3 + 2 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen über $\mathbb{R}$.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2^n+1)}{n} \cdot t^n \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n^2+1}\right)^n \cdot t^n$$

und untersuchen Sie die Reihe in (i) auf Konvergenz in den Randpunkten.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 1 Punkte)

(i) Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$ für $|q| < 1$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes $(\sum_{n=0}^{\infty} q^n)^2$

(ii) Zeigen Sie: konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

Hinweis: Betrachten Sie den Beweis von Lemma 12.29.

(iii) Zeigen Sie, dass die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ in $\mathbb{K}$ den selben Konvergenzradius haben.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Menge

$$M = \left\{ (-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-x-2}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x}\right)$.

Abgabe bis zum 29. Juni 2020 um 12:00.