Analysis 1, SS 2020

Klaus Kröncke

Übungsblatt 9 Montag, 29. Juni 2020

Aufgabe 1 (2 + 2 Punkte)

(i) Verwenden Sie die ε-δ-Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sqrt{1-x^3}$ stetig in $[0,1]$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 2 (3 + 1 Punkte)
Zeigen Sie: Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.
Gilt die Aussage auch noch, wenn f nicht stetig ist?

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen Sie: Ist $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ gleichmäßig stetig mit $f(0) = 0$, so gibt es eine Konstante $K > 0$ mit

$$f(x) \leq 1 + K \cdot x$$

für alle $x \in [0,\infty)$.

Aufgabe 4 (2 + 2 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

(ii) Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{\frac{x}{n}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Abgabe bis zum 6. Juli 2020 um 12:00.