Analysis I

Klaus Kröncke
Fachbereich Mathematik
Universität Tübingen

Vorlesungsskript

Sommersemester 2020

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieses Skriptum ist eine Ausarbeitung der Vorlesung Analysis 1 im Sommersemester 2020 und wird laufend aktualisiert. Im Wesentlich wird dieses Skriptum eine Neuauflage des Skriptums von Thomas Markwig aus dem Sommersemester 2017 sein. Ich werde an einigen Stellen einige zusätzliche Anmerkungen einfügen, um das Selbststudium zu erleichtern. Bei Tippfehlern oder Unklarheiten kontaktieren Sie mich bitte gerne.

An dieser Stelle möchte ich meinem Kollegen Thomas Markwig für die Bereitstellung der TeX-Dateien des alten Skripts ganz herzlich danken.

Einleitung von Thomas Markwig zur alten Auflage

Die vorliegende Ausarbeitung zu den Vorlesungen Analysis 1 und 2 im Sommersemester 2017 und Wintersemester 2017/18 wird im wesentlichen wiedergeben, was während der Vorlesung an die Tafel geschrieben wird. Einige wenige Abschnitte werden ausführlicher sein. Die Ausarbeitung ersetzt somit in keiner Weise ein Lehrbuch.

Hinweise zur Benutzung dieses Skriptes

Dies ist eine ungewöhnliche Vorlesung. Für mich ist es die erste Vorlesung, die (zumindest vorerst) online stattfindet und nicht auf traditionelle Art und Weise. Dies erfordert von Ihnen ein höreres Maß von Selbstständigkeit beim Erlernen des Stoffes. Ich möchte daher hier einige Hinweise zum Lesen des Skriptes geben.

- *Lesen Sie langsam und genau.* Ein Skriptum liest sich nicht wie eine Zeitung und ein mathematisches Skriptum erst recht nicht. Lesen Sie erst weiter, wenn Sie einen diskutierten Sachverhalt wirklich genau verstanden haben.
- *Machen Sie sich die mathematische Sprache und Denkweise so früh wie möglich zu eigen.* Sie mag einem am Anfang wie unötige Pedanterie erscheinen. Sie ist aber notwendig, um mathematische Aussagen präzise zu formulieren und zu beweisen.
- *Überlegen Sie sich Beispiele.* Belegen Sie Definitionen und Sätze mit Beispielen verschiedenster Art. Das wird Ihnen helfen, ein Gefühl für einen Begriff oder Sachverhalt zu geben. Ich werde an einigen Stellen im Skript auch Hinweise dafür geben.
- *Lernen Sie konsequent mit.* Es passiert in der Mathematik unglaublich schnell, dass man nicht mehr mitkommt. Gerade die ersten Wochen erfordern einiges an Anstrengung. Starten Sie sofort damit, das Skript zu studieren und bleiben Sie stets am Ball.
- *Studieren Sie alternative Literatur*, die Sachverhalte aus einer anderen Perspektive erklärt. Zu Kapitel 1 empfehle ich das Buch [**SS18**]. Besuchen Sie auch die im Literaturverzeichnis angegebene Webseite und die darin geteilten Videos.

KAPITEL I

Grundlegende Begriffsbildungen

Wir beginnen damit, grundlegende Begriffe einzuführen und zu besprechen, die für alle mathematischen Disziplinen gleich wichtig sind.

§ 1 Etwas Logik

Wie alle Wissenschaftler versuchen auch die Mathematiker *Aussagen* über die Objekte ihrer Forschungsarbeit aufzustellen und *als wahr nachzuweisen*. Anders aber als etwa in den Naturwissenschaften werden die zu untersuchenden Objekte nicht von außen an die Mathematiker herangetragen, vielmehr schaffen sie sie sich selbst durch die Vorgabe sogenannter *Axiome*. Wie hat man dies zu verstehen? Was ist ein Axiom? Was heißt es, eine Aussage als wahr nachzuweisen? Und was eigentlich ist eine Aussage?

Nun, sobald wir uns auf eine Sprache geeinigt haben, in der wir uns verständigen wollen, sind wir in der Lage, Sätze zu bilden, Sätze, wie etwa (in unserer Alltagssprache)

“Dieser Satz enthält fünf Worte.”

oder

“Löse die folgende Aufgabe.”

Ein solcher Satz stellt eine *Aussage* in unserem Sinne dar, wenn wir entscheiden können, ob er wahr oder falsch ist. Gemäß dieser Konvention ist der erste der obigen Sätze eine – wahre – Aussage, während beim zweiten Satz, einer Aufforderung, die Frage nach wahr oder falsch wenig Sinn ergibt. Er ist mithin keine Aussage. Wir halten fest:

> Aussagen erkennen wir daran, dass ihnen ein Wahrheitswert zugeordnet ist, **w** für *wahr* oder **f** für *falsch*.

Im folgenden werden wir als Platzhalter für Aussagen meist Großbuchstaben verwenden: $A, B, C, \ldots$.

Eine Aussage als *wahr nachzuweisen*, soll bedeuten, dass wir sie durch logische Schlüsse auf andere, uns als wahr bekannte Aussagen zurückführen. Nehmen wir etwa den folgenden Satz:

A : Der Bundespräsident ist stets mindestens vierzig Jahre alt.

Wir stellen zunächst einmal fest, dass es sich um eine Aussage handelt – und zwar um eine *wahre* Aussage, wie wir aus Artikel 54 des Grundgesetzes ableiten. Dort nämlich finden wir zur Wahl des Bundespräsidenten folgende Aussage:

B : Wählbar ist jeder Deutsche, der das Wahlrecht zum Bundestage besitzt und das vierzigste Lebensjahr vollendet hat.

Weil nun das Grundgesetz gültig ist, ist Aussage A wahr. Wir haben Aussage A also auf eine uns bekannte wahre Aussage zurückgeführt.

Dass die von uns aus dem Grundgesetz zitierte Aussage B ihrerseits wahr ist, läßt sich nicht weiter auf andere Aussagen zurückführen. Vielmehr handelt es sich hierbei um eine Festlegung des Gesetzgebers, der das Gesetz erlassen und damit diese Aussage für wahr erklärt hat.

> Eine Aussage, der der Wahrheitswert **w** schlicht durch Festlegung zugewiesen wurde, nennen wir ein *Axiom*.

Man kann in diesem Sinne das Grundgesetz als eine Sammlung von Axiomen, oder ein Axiomensystem, auffassen – auch wenn der Vergleich in mancher Hinsicht hinken mag.

Eingangs haben wir erklärt, dass die Mathematiker sich die Welt, die sie untersuchen, und ihre Objekte selbst erschaffen. Sie tun dies, indem sie sich einige wenige Aussagen als Axiome vorgeben und sodann studieren, was sich aus diesen durch logisch korrekte Schlüsse ableiten läßt. Freilich, so wie der Gesetzgeber seine Gesetze nicht willkürlich erläßt, so wählen auch die Mathematiker die Axiome, die sie sich vorgeben, mit Bedacht, das heißt, mit dem Ziel, interessante Strukturen zu gewinnen – und die vielfältigen Anwendungen zeigen, dass die Mathematiker bei diesem Vorhaben nicht nur sehr kreativ, sondern auch sehr erfolgreich gewesen sind. Immer wieder haben sie sich von Fragestellungen der Alltagswelt inspirieren lassen, haben die Probleme auf wenige Kernpunkte reduziert und in ein (mathematisches) *Modell* übersetzt. Dabei bedeutet letzteres nichts anderes, als dass man die zu benutzende Sprache und die geltenden Axiome festlegt und dass man die Fragen in dieser neuen Sprache formuliert. Die Stärke dieser *Modellbildung* besteht nun darin, dass man innerhalb des Modells exakt und ohne Wenn und Aber feststellen kann, ob eine Aussage wahr ist oder nicht. Wahr ist sie stets dann, wenn sie durch eine ganze Reihe logisch korrekter Schlüsse aus den vorgegebenen Axiomen hervorgeht. Wann aber ist denn eine Aussage aus einer anderen durch einen *logisch korrekten Schluß* hervorgegangen?

Bevor wir uns dieser Frage erneut zuwenden, wollen wir klären, wie man aus gegebenen Aussagen überhaupt neue Aussagen gewinnen und so das Arsenal an Aussagen erweitern kann.

Eine ganz natürliche Möglichkeit ist die Verneinung oder *Negation* einer Aussage, etwa

$\neg\mathsf{A}$: Der Bundespräsident ist *nicht* stets mindestens vierzig Jahre alt.

Wir wollen generell die Negation einer Aussage X mit dem Symbol $\neg\mathsf{X}$ bezeichnen, und es sollte gelten, wenn X wahr ist, so ist $\neg\mathsf{X}$ falsch, und umgekehrt. Das heißt insbesondere, der Wahrheitswert von $\neg\mathsf{X}$ hängt nur vom Wahrheitswert von X ab. Dies erlaubt es uns, den Wahrheitswert von $\neg\mathsf{X}$ in Abhängigkeit des Wahrheitswertes von X in einer Tabelle festzuhalten:

X	$\neg\mathsf{X}$
w	**f**
f	**w**

Aus unserer Alltagssprache sind wir es gewohnt, mehrere Aussagen in auflistender Weise durch das Wort "und" miteinander zu verbinden. Betrachten wir etwa die folgenden Aussagen

C : Wählbar sind nur Deutsche, die das Wahlrecht zum Bundestag besitzen.

sowie

D : Wählbar sind nur Deutsche, die das vierzigste Lebensjahr vollendet haben.

Man erkennt unschwer, dass die Verknüpfung der Aussagen C und D durch "und" inhaltlich mit unserer obigen Aussage B übereinstimmt, und man spricht von der *Konjunktion* von C und D. Auch hier wollen wir wieder eine symbolische Schreibweise einführen. Sind X und Y zwei Aussagen, so schreiben wir für "X *und* Y" auch $\mathsf{X}\wedge\mathsf{Y}$. Wenn nun $\mathsf{X}\wedge\mathsf{Y}$ wieder eine Aussage ist, so muß ihr auch ein Wahrheitswert zugeordnet sein. Dabei sollte wohl $\mathsf{X}\wedge\mathsf{Y}$ nur dann wahr sein, wenn sowohl X als auch Y wahr sind. Wir können den Wahrheitswert von $\mathsf{X}\wedge\mathsf{Y}$ also wieder in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten von X und Y in einer Tabelle, auch *Wahrheitstafel* genannt, festhalten.

X	Y	$\mathsf{X}\wedge\mathsf{Y}$
w	**w**	**w**
w	**f**	**f**
f	**w**	**f**
f	**f**	**f**

Ebenso ist uns aus unserem alltäglichen Gebrauch ein weiteres Bindewort bekannt, "oder", welches wir hier instrumentalisieren wollen. Sind X und Y wieder Aussagen, so werden wir gewöhnlich $\mathsf{X}\vee\mathsf{Y}$ statt "X *oder* Y" schreiben. Die so entstandene neue Aussage nennt man die *Disjunktion* von X und Y, und damit sie wahr ist, soll es uns reichen, dass eine der Aussagen X und Y wahr ist. Dies führt zur folgenden

Wahrheitstafel:

X	Y	$X \vee Y$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Man beachte, dass *oder* hier nicht das ausschließende *entweder oder* ist! Die Aussage etwa, dass die Kinder unserer Bundestagsabgeordneten stets die deutsche *oder* eine andere Staatsangehörigkeit haben, ist wahr, weil sie nicht ausschließt, dass sie die deutsche und eine andere Staatsangehörigkeit haben.

Aufgabe 1.1

a. Wie würde eine Wahrheitstafel für das ausschließende entweder oder aussehen?

b. Konstruieren Sie das ausschließende entweder oder mittels der bis hierhin eingeführten Operationen.

Im Absatz zur Konjunktion heißt es, daß die Aussage B mit der Konjunktion der Aussagen C und D inhaltlich übereinstimme. Sprachlich sind beide Aussagen aber deutlich verschieden. Anstatt sie *gleich* zu nennen, wollen wir deshalb nur davon sprechen, dass B und $C \wedge D$ *gleichwertig* oder *äquivalent* sind. Dies soll zum Ausdruck bringen, dass sie den gleichen Wahrheitswert besitzen. Gehen wir einen Schritt weiter, so können wir eine neue Verknüpfung zweier Aussagen X und Y einführen, die *Äquivalenz* von X und Y, in Symbolen $X \Leftrightarrow Y$. Sie soll genau dann wahr sein, wenn X und Y den gleichen Wahrheitswert besitzen. Dies führt zu folgender Wahrheitstafel:

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel 1.2

Die Äquivalenz folgender beider Aussagen ist wahr:

A : Ich wohne in Berlin.

B : Ich wohne in der bevölkerungsreichsten Stadt Deutschlands.

Ein kurzer Blick auf die bislang eingeführten Operationen zur Gewinnung neuer Aussagen aus gegebenen zeigt, dass die Wahrheitswerte der neuen Aussagen stets allein von den Wahrheitswerten der gegebenen Aussagen abhängen, und nicht von deren konkretem Inhalt.

Wir erlauben uns deshalb, eine letzte Verknüpfung von Aussagen, die *Implikation*, dadurch einzuführen, dass wir bei gegebenen Aussagen X und Y den Wahrheitswert der Aussage “X impliziert Y” oder “wenn X, dann Y”, in Zeichen $X \Rightarrow Y$, festlegen:

X	Y	$X \Rightarrow Y$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

(1)

Die Wortwahl legt nahe, dass die Aussage $X \Rightarrow Y$ es erlaubt, aus der Wahrheit von X Rückschlüsse auf die Wahrheit von Y zu ziehen. Dies kommt auch in den ersten beiden Zeilen der Wahrheitstafel zum Ausdruck, wird aber noch deutlicher, wenn wir zeigen, dass die Aussagen $X \Rightarrow Y$ und $\neg X \vee Y$ zueinander äquivalent sind. Ist dann nämlich X wahr, so ist $\neg X$ falsch. Damit $\neg X \vee Y$ wahr sein kann, muß mithin Y wahr sein. Dies läßt sich so interpretieren, dass sich bei wahrer Aussage X und korrekter Implikation $X \Rightarrow Y$ für Y nur die Möglichkeit ergibt, ebenfalls wahr zu sein.

In dieser Weise werden wir die Implikation immer wieder anwenden. Wir werden mit einer wahren Aussage starten und mittels einer logisch korrekten Argumentationskette Y aus X ableiten – sprich wir werden $X \Rightarrow Y$ als wahr erweisen. Damit haben wir dann zugleich die Wahrheit von Y bewiesen.

Die Gültigkeit der behaupteten Äquivalenz leiten wir durch eine Betrachtung der Wahrheitstafeln her. Es reicht, festzustellen, dass die Werte in den Spalten von $X \Rightarrow Y$ und von $\neg X \vee Y$ übereinstimmen:

X	Y	$\neg X$	$\neg X \vee Y$	$X \Rightarrow Y$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Beispiel 1.3
Tabelle (1) sei nun noch an zwei Beispielen illustriert:

a. Betrachten wir die beiden Aussagen
   A : Ich wohne in Tübingen.
   B : Ich wohne in Deutschland.
   Dann ist die Aussage $A \Rightarrow B$ immer wahr. Die Aussage $B \Rightarrow A$ ist jedoch nicht immer wahr.

b. Ist A eine Aussage, die stets falsch ist, zum Beispiel
   A : $0 = 1$,
   dann besagt Tabelle (1), dass die Aussage $A \Rightarrow B$ immer wahr ist, egal ob B wahr oder falsch ist. Diese Tatsache ist auch unter dem Ausspruch *aus Falschem folgt Beliebiges* bekannt.

Wir halten fest:

> Der Wahrheitswert der Implikation $X \Rightarrow Y$ bewertet nur die Korrektheit des Schließens, nicht jedoch die Wahrheit der Aussagen X und Y.

Es sei deshalb jedem ans Herz gelegt, die Voraussetzungen, auf die er seine Aussagen gründet, genauestens auf ihren Wahrheitsgehalt zu prüfen! Sonst nützt auch noch so sauberes Schließen gar nichts.

Wir wollen den eingeführten Begriffsapparat nun an zwei Beispielen testen, die uns einige wichtige Erkenntnisse liefern werden.

Beispiel 1.4
Es seien X und Y zwei Aussagen.

a. Wir haben bereits bei der Definition der Äquivalenz davon gesprochen, dass $X \Leftrightarrow Y$ bedeuten solle, dass "X *genau dann* wahr ist, *wenn* Y wahr ist". Dies wollte verkürzt ausdrücken, "wenn X, dann Y" und "wenn Y, dann X". Wir behaupten deshalb, dass die Aussagen "$X \Leftrightarrow Y$" und "$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$" äquivalent sind, mit anderen Worten, die Aussagen X und Y sind genau dann äquivalent, wenn Y aus X folgt und umgekehrt.
Diese Tatsache werden wir immer wieder verwenden, wenn wir die Äquivalenz zweier Aussagen beweisen wollen. Ihre Gültigkeit leiten wir wieder durch eine Betrachtung der Wahrheitstafeln her.

X	Y	$X \Rightarrow Y$	$Y \Rightarrow X$	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$	$X \Leftrightarrow Y$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

b. Die Aussagen "$X \Rightarrow Y$" und "$\neg Y \Rightarrow \neg X$" sind ebenfalls äquivalent, wie die folgende Tabelle zeigt:

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$X \Rightarrow Y$	$\neg Y \Rightarrow \neg X$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Man nennt diese Äquivalenz auch *Kontraposition*. Will man also zeigen, dass eine Aussage X eine Aussage Y impliziert, so kann man statt dessen beide Aussagen verneinen und zeigen, dass aus $\neg Y$ die Aussage $\neg X$ folgt.

□

Kehren wir nun zu der Frage zurück, wann eine Aussage Y aus einer Aussage X durch einen *logisch korrekten Schluß* hervorgegangen ist. Bedeutet dies nur, dass $\mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{Y}$ den Wahrheitswert **w** besitzt? Ja ... und nein! Ist X wahr und hat die Implikation $\mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{Y}$ den Wahrheitswert **w**, so folgt unmittelbar, dass Y wahr ist. In diesem Sinne gilt die Antwort *ja*. Aber damit haben wir das Problem nur verlagert, da die Frage bleibt, wie wir prüfen, ob $\mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{Y}$ denn wahr ist, ohne den Wahrheitswert von Y zu kennen. Wir haben bereits weiter oben – sehr vage – angedeutet, dass wir hierzu meist eine Kette von logisch korrekten und in sich schlüssigen Argumenten verwenden, und viel deutlicher wollen wir hier auch nicht werden. Im Verlauf der folgenden Kapitel werden wir viele Beispiele dafür sehen, wie eine Implikation durch eine Reihe von Argumenten bewiesen – oder besser untermauert – wird; und es wird sicher immer wieder vorkommen, dass Ihnen diese auf den ersten Blick *nicht* wirklich schlüssig vorkommen, dass es eines genaueren Hinsehens und vielleicht auch der Ergänzung einiger Argumente bedarf, bis Ihr der Kette das Prädikat *logisch korrekt und in sich schlüssig* verleihen wollt. Und das ist eine wichtige Erkenntnis, ob ein Schluß als logisch korrekt erkannt wird, hängt vom Betrachter ab. Und deshalb ist die Frage, ob ein Schluß logisch korrekt ist, weit mehr als nur die Frage, ob $\mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{Y}$ wahr ist.

Beispiel 1.5

Hier nun einige mathematische Aussagen.

A. Jede gerade Zahl ist Summe zweier ungerader Zahlen.

B. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

C. Jede gerade Zahl größer zwei ist Summe zweier Primzahlen.

D. Zu jedem Kreis läßt sich, nur mit Zirkel und Lineal, ein Quadrat konstruieren, das den gleichen Flächeninhalt hat.

E. Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ besitzt für $n > 2$ keine Lösung mit positiven ganzen Zahlen x, y, z.

F. Gegeben sei eine Ansammlung nicht-leerer Mengen. Dann läßt sich aus jeder der Mengen ein Element auswählen.

Die Aussage A ist offensichtlich wahr, und auch die Aussage B ist richtig, allerdings ist dies keine triviale Aussage. Sie muß bewiesen werden. Die Aussage C ist die bekannte *Goldbachsche Vermutung* aus dem Jahre 1742. Sie ist bis heute weder bewiesen noch widerlegt.

Die Aussage D ist unter dem Begriff *Quadratur des Kreises* bekannt. Sie ist falsch, was sich daraus ableiten läßt, dass die Kreiszahl π transzendent ist (Lindemann 1882). Umgangssprachlich sollte man also die Quadratur des Kreises nicht als Synonym für etwas extrem Schwieriges verwenden, sondern für etwas Unmögliches.

Die Aussage E hat jahrhundertelang als *Fermatsche Vermutung* die Mathematiker beschäftigt. Sie wurde erst 1995 von dem englischen Mathematiker Andrew Wiles als wahr nachgewiesen. Für den Beweis wurden modernste und tiefste mathematische Methoden verwendet.

Die Aussage F, möchte man meinen, ist offensichtlich wahr, eher noch als Aussage A. In gewissem Sinne ist diese Aussage jedoch weder beweisbar noch widerlegbar. Sie ist im Axiomensystem der Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel unabhängig von den anderen Axiomen. In der Tat kann man die Aussage F, die als *Auswahlaxiom* bezeichnet wird, als Axiom der Mengenlehre zulassen (was wir, wie die überwiegende Zahl der Mathematiker, tun wollen) oder auch nicht. Da das Auswahlaxiom, wenn überhaupt, so nur für sogenannte überabzählbare Ansammlungen strittig ist, sind Zustimmung oder Ablehnung in dieser Vorlesung kaum von praktischer Relevanz. □

Wir wollen nun der besseren Übersichtlichkeit halber in einer Bemerkung zusammenfassen, was wir bisher gelernt haben.

Bemerkung 1.6

a. Eine *Aussage* ist eine Äußerung, der eindeutig ein Wahrheitswert wahr (**w**) oder falsch (**f**) zugeordnet ist.

b. Aus Aussagen X und Y können wir durch Anwenden *logischer Operatoren* neue Aussagen bilden:

Symbol	Bedeutung	Bezeichnung	Alternative Beschreibung
$\neg X$	nicht X	*Negation*	
$X \vee Y$	X oder Y	*Disjunktion*	
$X \wedge Y$	X und Y	*Konjunktion*	
$X \Rightarrow Y$	aus X folgt Y	*Implikation*	$(\neg X) \vee Y$ und $(\neg Y) \Rightarrow (\neg X)$
$X \Leftrightarrow Y$	genau dann X, wenn Y	*Äquivalenz*	$(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$

Neben Aussagen, die wahr oder falsch sein können, sind *Aussageformen* oder *Prädikate* wichtig.

> Eine *Aussageform* ist eine Äußerung, die eine oder mehrere Variablen enthält und zu einer Aussage (d.h. wahr oder falsch) wird, wenn man zulässige Werte für diese Variablen einsetzt.

So ist etwa

$$a > b$$

eine Aussageform, die von den Variablen a und b abhängt, für die wir die ganzen Zahlen als zulässige Werte ansehen wollen. Setzen wir konkrete Werte ein, so entsteht eine Aussage, die wahr sein kann (z.B. für $a = 42$ und $b = 37$) oder falsch (z.B. für $a = 2$ und $b = 4$).

Aussageformen werden in der Praxis häufig mit *Quantoren* gebraucht:

$\forall$: "für alle".
$\exists$: "es existiert ein".
$\exists_1$: "es existiert genau ein".
$\nexists$: "es existiert kein".

Ist P eine Aussageform, die von einer Variablen x abhängt, so bedeutet:

$\forall\, x \,:\, P(x)$: "für alle x gilt $P(x)$",
$\exists\, x \,:\, P(x)$: "es gibt ein x, so dass $P(x)$ gilt".

Mit Hilfe der Quantoren haben wir aus den Aussageformen neue Aussagen gebildet.

Beispiel 1.7
Die Aussage

$$\forall\, x, \forall\, y, \forall\, z, \forall\, n \,:\, n > 2 \Rightarrow x^n + y^n \neq z^n.$$

ist für positive natürliche Zahlen x, y, z und n die in Beispiel 1.5 formulierte Fermatsche Vermutung.

Wichtig ist das richtige Verneinen einer Aussage.

$$\neg\big(\forall\, x \,:\, P(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x \,:\, \big(\neg P(x)\big).$$

Die Verneinung der Aussage "für alle x gilt die Aussage $P(x)$" ist gleichbedeutend mit "es gibt ein x, für das die Aussage $P(x)$ nicht gilt".

$$\neg\big(\exists\, x \,:\, P(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall\, x \,:\, \big(\neg P(x)\big).$$

Die Verneinung der Aussage "es gibt ein x, für das die Aussage $P(x)$ gilt" ist gleichbedeutend mit "für alle x gilt die Aussage $P(x)$ nicht" bzw. mit "für kein x gilt die Aussage $P(x)$". Ist P eine Aussageform, die von zwei Variablen x, y abhängt, so bedeutet:

$\forall\, x\, \exists\, y \,:\, P(x,y)$: "für alle x existiert ein y sodass $P(x,y)$" gilt.
$\exists\, x\, \forall\, y \,:\, P(x,y)$: "es gibt ein x, sodass für alle y $P(x,y)$ gilt".

Bemerkung 1.8
Beachten Sie, dass die Reihenfolge der Quantoren entscheidend für eine Aussage ist. Die beiden genannten Aussagen sind nicht äquivalent. Überlegen Sie sich das an einem Beispiel.

Bei zwei Variablen verneint man wie folgt:

$$\neg\big(\forall\, x\, \exists\, y \,:\, P(x,y)\big) \;\Leftrightarrow\; \exists\, x\, \forall\, y \,:\, \big(\neg P(x,y)\big).$$

Ebenso gilt:

$$\neg\big(\exists\, x\, \forall\, y \,:\, P(x,y)\big) \;\Leftrightarrow\; \forall\, x\, \exists\, y \,:\, \big(\neg P(x,y)\big).$$

Entsprechende Regeln des Verneinens gelten für eine beliebige endliche Anzahl von Variablen.

Bemerkung 1.9 (Griechisches Alphabet)
Es hat sich in der Mathematik eingebürgert, neben den lateinischen auch griechische Buchstaben zu verwenden, um Objekte und Variablen zu bezeichnen, und das werden wir immer wieder mal tun. Deshalb füge ich hier das griechische Alphabet an:

A α Alpha	B β Beta	Γ γ Gamma	Δ δ Delta	E ϵ ε Epsilon	Z ζ Zeta	H η Eta	Θ θ ϑ Theta
I ι Iota	K κ Kappa	Λ λ Lambda	M μ My	N ν Ny	Ξ ξ Xi	O o Omikron	Π π Pi
P ρ Rho	Σ σ Sigma	T τ Tau	Υ υ Ypsilon	Φ ϕ φ Phi	X χ Chi	Ψ ψ Psi	Ω ω Omega

Aufgaben

Aufgabe 1.10
Es seien X, Y und Z Aussagen. Zeigen Sie, dass die Äquivalenz der folgenden Aussagen stets wahr ist.

a. *Assoziativgesetze*
   - $(\mathsf{X} \vee \mathsf{Y}) \vee \mathsf{Z} \iff \mathsf{X} \vee (\mathsf{Y} \vee \mathsf{Z})$.
   - $(\mathsf{X} \wedge \mathsf{Y}) \wedge \mathsf{Z} \iff \mathsf{X} \wedge (\mathsf{Y} \wedge \mathsf{Z})$.

b. *Kommutativgesetze*
   - $\mathsf{X} \vee \mathsf{Y} \iff \mathsf{Y} \vee \mathsf{X}$.
   - $\mathsf{X} \wedge \mathsf{Y} \iff \mathsf{Y} \wedge \mathsf{X}$.

c. *Distributivgesetze*
   - $\mathsf{X} \wedge (\mathsf{Y} \vee \mathsf{Z}) \iff (\mathsf{X} \wedge \mathsf{Y}) \vee (\mathsf{X} \wedge \mathsf{Z})$.
   - $\mathsf{X} \vee (\mathsf{Y} \wedge \mathsf{Z}) \iff (\mathsf{X} \vee \mathsf{Y}) \wedge (\mathsf{X} \vee \mathsf{Z})$.

d. *De Morgansche Regeln*
   - $\neg(\mathsf{X} \vee \mathsf{Y}) \iff \neg\mathsf{X} \wedge \neg\mathsf{Y}$.
   - $\neg(\mathsf{X} \wedge \mathsf{Y}) \iff \neg\mathsf{X} \vee \neg\mathsf{Y}$.

Aufgabe 1.11

a. Negieren Sie die folgenden Aussagen:
   (i) Jedes Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.
   (ii) Mindestens ein Auto, das am Samstag um 9:00 auf dem Parkplatz parkte, war rot.
   (iii) Am Samstag um 9:00 parkten rote Autos auf dem Parkplatz.
   (iv) Es gibt keine größte ganze Zahl.
   (v) Keine Regel ohne Ausnahme.

Warum ist das Sprichwort „Keine Regel ohne Ausnahme“ in sich widersprüchlich?

b. Machen Sie sich anhand der Aufgaben (i)-(iii) die Wichtigkeit der korrekten Verneinung deutlich.

c. Überlegen Sie sich weitere Beispiele.

Aufgabe 1.12

a. Drücken Sie die folgenden Aussagen in Worten aus und, falls eine Aussage falsch sein sollte, ersetzen Sie sie dabei durch ihre Negation.

(i) $\forall\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, m = n + n,$

(ii) $\exists\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} \,:\, (m \neq n) \wedge (m^n = n^m).$

b. Drücken Sie die folgenden Aussagen in Symbolen aus:

(i) Zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es eine weitere reelle Zahl.

(ii) Es gibt keine größte Primzahl in den natürlichen Zahlen.

Aufgabe 1.13

Welche der folgenden Schlußfolgerungen ist korrekt?

a. Falls es anfängt zu regnen, wird die Straße naß. Aber, da die Straße nicht nass werden wird, wird es auch nicht regnen.

b. Einige Politiker sind ehrlich. Einige Frauen sind Politiker. Also sind einige weibliche Politiker ehrlich.

Aufgabe 1.14

Drücke die folgende Aussage in Worten aus:

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, m \geq n \implies \exists\, l \in \mathbb{N} \,:\, m = n + l.$$

Aufgabe 1.15 a. Negieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) Zu jedem Vorschlag gibt es jemanden, der den Vorschlag kritisiert.

(ii) In manchen Häusern haben nicht alle Wohnungen fließendes Wasser.

b. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(i) Jede ganze Zahl ist ein Vielfaches von drei.

(ii) Die Summe von je zwei ungeraden Zahlen ist gerade.

§ 2 Mengen

Definitionsversuch 2.1 (Georg Cantor)
Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die in einer Menge zusammengefaßten Objekte nennen wir die *Elemente* der Menge.

Notation 2.2

a. *Mengen angeben durch Auflisten der Elemente*:

$$\text{z.B. } \{1, 2, 5, 3, 4\}$$

b. *Mengen angeben durch Vorschreiben einer Eigenschaft*:

$$\text{z.B. } \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl kleiner als } 6\}$$

c. Sei M eine Menge.
   - $x \in M$ heißt "x *ist Element von* M"
   - $x \notin M$ heißt "x *ist nicht Element von* M"

d. $\{\}$ und $\emptyset$ bezeichnen die *leere Menge*, d.h. die Menge, die kein Element enthält.

Definition 2.3 (Inklusionsrelationen)
Für zwei Mengen M und N definieren wir:

1) $M \subseteq N \;:\Longleftrightarrow\; (x \in M \Rightarrow x \in N)$ "M ist *Teilmenge* von N"

2) $$M = N \;:\Longleftrightarrow\; (M \subseteq N \;\wedge\; N \subseteq M)$$
$$\Longleftrightarrow\; (x \in M \;\Leftrightarrow\; x \in N)$$

3) $$M \neq N \;:\Longleftrightarrow\; \neg(M = N)$$
$$\Longleftrightarrow\; ((\exists\, x \in M : x \notin N) \vee (\exists\, x \in N : x \notin M))$$

4) $M \subsetneqq N \;:\Longleftrightarrow\; (M \subseteq N \;\wedge\; M \neq N)$ "M ist *echte Teilmenge* von N"

Beispiel 2.4

a. $\{1, 2, 5, 3, 4\} = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl kleiner als } 6\}$.

b. $\{1, 3\} \subsetneqq \{1, 2, 3\}$.

c. $\{1, 2, 1\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$.

d. $1 \notin \{2, 3\}$, $2 \in \{2, 3\}$.

Bemerkung 2.5 (Die Zahlbereiche)
Wir setzen die folgenden Mengen in unserer Vorlesung als bekannt voraus:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die Menge der *natürlichen Zahlen*,
- $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ die Menge der *nichtnegative ganzen Zahlen*,
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der *ganzen Zahlen*,
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ die Menge der *rationalen Zahlen*,
- $\mathbb{R}$, die Menge der *reellen Zahlen*, d.h. der Punkte auf der Zahlengeraden.

Man beachte:

$$\mathbb{N} \subsetneqq \mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{Z} \subsetneqq \mathbb{Q} \subsetneqq \mathbb{R}.$$

Im Verlauf der Vorlesung werden wir viele bekannte Eigenschaften dieser Mengen nochmals ausführlich thematisieren.

Definition 2.6 (Operationen von Mengen)
Es seien M, N, P sowie M_i für $i \in I$ Mengen.

a. $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$ heißt der *Durchschnitt* von M und N.

b. $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$ heißt die *Vereinigung* von M und N.

c. $M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$ heißt die *Differenzmenge* von M und N. Wir sagen auch M *ohne* N.

d. $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}$ heißt das *kartesische Produkt* von M und N. Dabei ist (x, y) ein *geordnetes Paar*, und für zwei geordnete Paare $(x, y), (u, v) \in M \times N$ gilt

$$(x, y) = (u, v) \iff (x = u \;\wedge\; y = v).$$

e. M und N heißen genau dann *disjunkt*, wenn $M \cap N = \emptyset$, d.h. wenn sie kein Element gemeinsam besitzen.

f. $P = M \dot\cup N \quad :\Longleftrightarrow \quad (P = M \cup N \quad \wedge \quad M \cap N = \emptyset)$.
Wir sagen dann, P ist die *disjunkte Vereinigung* von M und N.

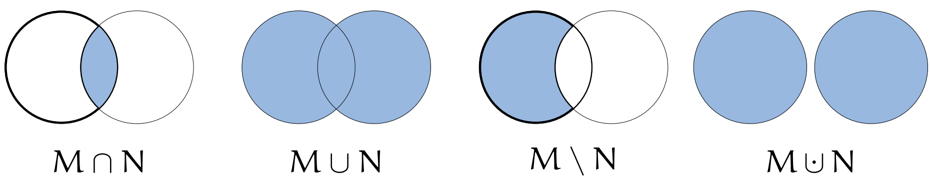


ABBILDUNG 1. Durchschnitt, Vereinigung, Differenzmenge, disjunkte Vereinigung

g. $\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid x \in M_i \;\forall\, i \in I\}$ heißt der *Durchschnitt* der M_i.

h. $\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists\, i \in I \;:\; x \in M_i\}$ heißt die *Vereinigung* der M_i.

i. $P = \dot\bigcup_{i \in I} M_i \quad :\Longleftrightarrow \quad (P = \bigcup_{i \in I} M_i \quad \wedge \quad M_i \cap M_j = \emptyset \;\forall\, i, j \in I$ mit $i \neq j)$.
Wir nennen die $(M_i)_{i \in I}$ dann auch eine *disjunkte Zerlegung* von P, und wir sagen, die M_i sind *paarweise disjunkt*.

Beispiel 2.7
Ist $M = \{1, 2\}$ und $N = \{e, \pi, i\}$, so ist

$$M \times N = \{(1, e), (1, \pi), (1, i), (2, e), (2, \pi), (2, i)\}.$$

Proposition 2.8 (Einfache Rechengesetze für Mengenoperationen)
Es seien M, N, P *Mengen.*

a. Assoziativgesetze

- $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$.
- $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.

b. Kommutativgesetze
- $M \cup N = N \cup M$.
- $M \cap N = N \cap M$.

c. Distributivgesetze
- $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.
- $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.

d. Identitätsgesetze
- $M \cup \emptyset = M$.
- $M \subseteq N \implies M \cap N = M$.

e. Komplementgesetze
- $M \subseteq N \implies M \cup (N \setminus M) = N$.
- $M \subseteq N \implies M \cap (N \setminus M) = \emptyset$.

Beweis: a., d. und e. überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

b. Es gilt:

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\} \stackrel{1.10}{=} \{x \mid x \in N \vee x \in M\} = N \cup M$$

und

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} \stackrel{1.10}{=} \{x \mid x \in N \wedge x \in M\} = N \cap M.$$

c. Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in M \cap (N \cup P) &\iff x \in M \ \wedge \ x \in N \cup P \\ &\iff x \in M \ \wedge \ (x \in N \ \vee \ x \in P) \\ &\stackrel{1.10}{\iff} (x \in M \ \wedge \ x \in N) \ \vee \ (x \in M \ \wedge \ x \in P) \\ &\iff x \in M \cap N \ \vee \ x \in M \cap P \\ &\iff x \in (M \cap N) \cup (M \cap P) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x \in M \cup (N \cap P) &\iff x \in M \ \vee \ x \in N \cap P \\ &\iff x \in M \ \vee \ (x \in N \ \wedge \ x \in P) \\ &\stackrel{1.10}{\iff} (x \in M \ \vee \ x \in N) \ \wedge \ (x \in M \ \vee \ x \in P) \\ &\iff x \in M \cup N \ \wedge \ x \in M \cup P \\ &\iff x \in (M \cup N) \cap (M \cup P). \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung 2.9 (Paradoxon von Russel)
Man muß bei der Definition von Mengen mittels Eigenschaften vorsichtig sein!

Betrachte die "*Menge*"

$$M = \{X \mid X \text{ ist Menge } \wedge X \notin X\}$$

aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten!

Angenommen, M wäre eine Menge. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $M \notin M$: Dann ist M eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält. Mithin gilt $M \in M$ aufgrund der Definition von M. Dies ist ein Widerspruch.

2. Fall: $M \in M$: Dann ist M eine Menge, die sich selbst als Element enthält. Mithin gilt $M \notin M$ aufgrund der Definition von M. Dies ist ebenfalls ein Widerspruch.

Also kann keiner der beiden Fälle auftreten, und wir haben insgesamt einen Widerspruch hergeleitet.

Fazit: M ist *keine* Menge! Auch die *Menge aller Mengen* gibt es nicht!

Aufgaben

Aufgabe 2.10 (De Morgansche Regeln)
Es seien M und M_i, $i \in I$, Mengen. Zeigen Sie die de Morganschen Regeln

$$M \setminus \bigcup_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} M \setminus M_i$$

und

$$M \setminus \bigcap_{i \in I} M_i = \bigcup_{i \in I} M \setminus M_i.$$

§ 3 Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir den für die Mathematik zentralen Begriff der Abbildung einführen.

Definition 3.1 (Abbildungen)
Es seien M und N zwei Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von M nach N ist eine *eindeutige Zuordnung*, die *jedem* Element $x \in M$ *genau ein* Element $f(x) \in N$ zuweist. Wir werden den Begriff *Funktion* nur dann verwenden, wenn $N = \mathbb{R}$ ist.

Wir nennen M den *Definitionsbereich* von f und N den *Ziel-* oder *Wertebereich.*

Notation:

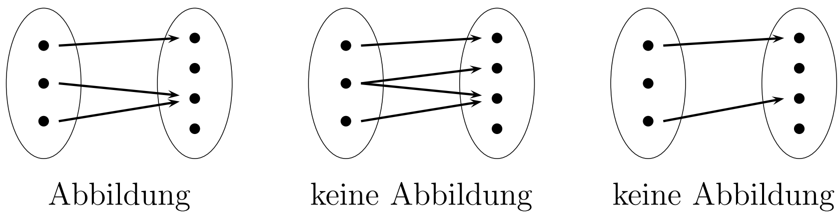
$$f : M \longrightarrow N : x \mapsto f(x).$$

Man beachte, aufgrund der Definition einer Abbildung, gilt für zwei Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : X \longrightarrow Y$:

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \quad \big(M = X \ \wedge \ N = Y \ \wedge \ \forall\, x \in M \ : \ f(x) = g(x)\big).$$

Beispiel 3.2

a. Die folgenden Bilder sollen den Begriff der Abbildung graphisch veranschaulichen:



b. $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 : x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0 : x \mapsto x^2$. Man beachte: $f \neq g$, da ihre Definitionsbereiche nicht übereinstimmen.

c. Sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und $A \subseteq M$. Dann heißt die Abbildung

$$f_{|A} : A \longrightarrow N : x \mapsto f(x)$$

die *Einschränkung* von f auf A.

d. Sei M eine Menge. Dann heißt die Abbildung

$$\mathrm{id}_M : M \longrightarrow M : x \mapsto x$$

die *Identität* auf M.

Definition 3.3 (Bilder und Urbilder)
Es sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$.

a. $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in M\} \subseteq M \times N$ heißt der *Graph* von f.

b. $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subseteq N$ heißt das *Bild* von A unter f.

c. $\mathrm{Im}(f) := f(M) \subseteq N$ heißt das *Bild* von f.

d. $f^{-1}(B) := \{x \in M \mid f(x) \in B\} \subseteq M$ heißt das *Urbild* von B unter f.

Beispiel 3.4

a. Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

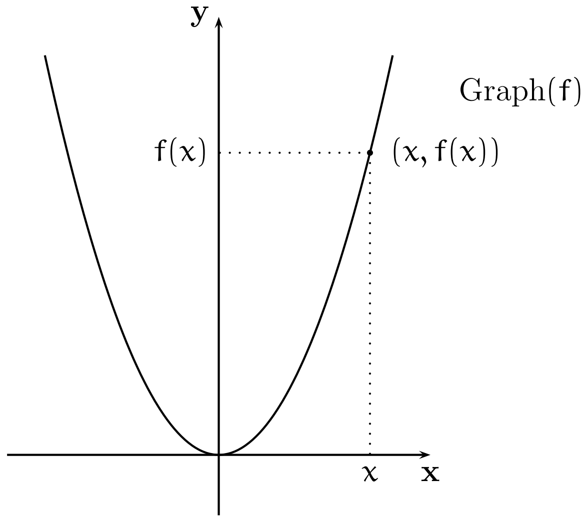


ABBILDUNG 2. Graph(f) für $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$

- Der Graph von f ist in Abbildung 2 zu sehen.
- Für $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ist $f(A) = \{0, 1, 4\}$.
- Für $B = \{0, 1\}$ ist $f^{-1}(B) = \{0, 1, -1\}$.
- Für $B' = \{-1\}$ ist $f^{-1}(B') = \emptyset$.
- $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

b. Die Abbildung $\mathrm{nf} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 : x \mapsto x + 1$ nennen wir die *Nachfolgerfunktion*. Es gelten

$$\mathrm{Im}(\mathrm{nf}) = \mathbb{N}$$

und

$$\forall\, y \in \mathrm{Im}(f) \ : \ \mathrm{nf}^{-1}(\{y\}) = \{y - 1\}.$$

Bemerkung 3.5 (Abbildungen und ihre Graphen)

a. Für zwei Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ und $g : P \longrightarrow N$ gilt:

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Graph}(f) = \mathrm{Graph}(g).$$

b. Ist $\Gamma \subseteq M \times N$ so, dass

$$\forall\, x \in M\ \exists_1\, y \in N \ : \ (x, y) \in \Gamma,$$

dann gibt es eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ mit $\Gamma = \mathrm{Graph}(f)$.

Fazit: Man hätte Abbildungen von M nach N auch als Teilmengen von $M \times N$ definieren können, die die Bedingung in b. erfüllen. So würde man vorgehen, wenn man die Mathematik ausgehend vom Begriff der Menge sukzessive aufbauen möchte.

Mit dieser Beschreibung sieht man übrigens sehr schön, daß es für jede Menge M *genau eine* Abbildung $f : \emptyset \longrightarrow M$ gibt, und daß es für eine nicht-leere Menge M keine Abbildung $f : M \longrightarrow \emptyset$ geben kann.

Definition 3.6 (Injektiv, surjektiv, bijektiv)
Es sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung.

a. f heißt genau dann *injektiv*, wenn

$$\forall\, x, x' \in M \;:\; f(x) = f(x') \implies x = x'.$$

b. f heißt genau dann *surjektiv*, wenn

$$\forall\, y \in N\, \exists\, x \in M \;:\; f(x) = y,$$

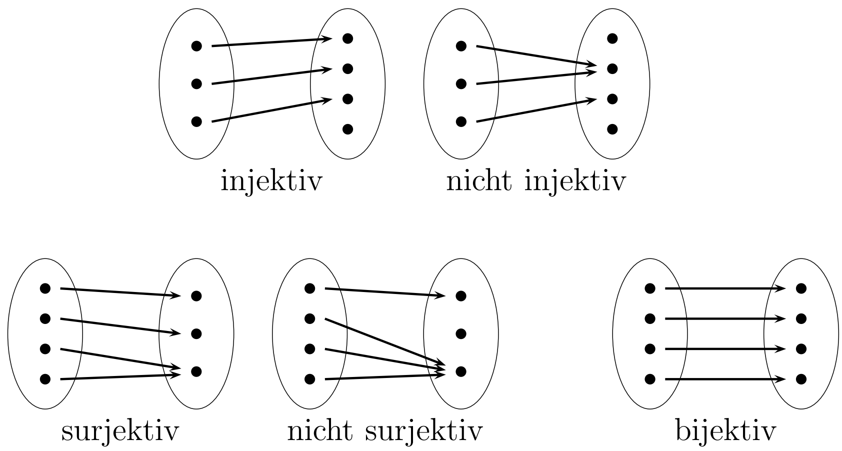
d.h. wenn $\mathrm{Im}(f) = N$.

c. f heißt genau dann *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung 3.7 (Injektiv, surjektiv, bijektiv)
Es sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung.

a. Ist $y \in N$ und $x \in M$ mit $f(x) = y$, so nennen wir x *ein Urbild* von y unter f.

b. Es gelten:
   - f ist injektiv $\iff$ jedes $y \in N$ hat *höchstens* ein Urbild.
   - f ist surjektiv $\iff$ jedes $y \in N$ hat *mindestens* ein Urbild.
   - f ist bijektiv $\iff$ jedes $y \in N$ hat *genau* ein Urbild.



Beispiel 3.8

a. Die Nachfolgerfunktion $\mathrm{nf} : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 : x \mapsto x + 1$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Denn, $x + 1 = \mathrm{nf}(x) = \mathrm{nf}(y) = y + 1$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$ impliziert $x = y$, und $0 \not\in \mathrm{Im}(f)$.

b. $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv.
Denn, für $x = 1 \neq -1 = y$ gilt $g(x) = g(1) = 1 = g(-1) = g(y)$.

c. Die Abbildung id_M ist bijektiv für jede Menge M.
Denn, für $y \in M$ gilt $\mathrm{id}_M(y) = y$, so dass id_M surjektiv ist, und für $x, x' \in M$ mit $\mathrm{id}_M(x) = \mathrm{id}_M(x')$ gilt $x = x'$, so dass id_M injektiv ist.

d. Ist $f : M \longrightarrow N_0$ injektiv, so ist die Abbildung $M \longrightarrow \mathrm{Im}(f) : x \mapsto f(x)$ offenbar bijektiv.

Definition 3.9 (Komposition von Abbildungen)
Seien $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ zwei Abbildungen. Die Abbildung

$$g \circ f : M \longrightarrow P : x \mapsto g(f(x))$$

heißt die *Komposition* oder *Verkettung* von f und g.

Beispiel 3.10
Seien $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 1$. Dann gilt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

und

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Man beachte, dass die Abbildungen $g \circ f$ und $f \circ g$ nicht gleich sind, da $(g \circ f)(1) = 2 \neq 4 = (f \circ g)(1)$.

Proposition 3.11 (Assoziativität der Komposition)
Seien $f : M \longrightarrow N$, $g : N \longrightarrow P$ *und* $h : P \longrightarrow Q$ *Abbildungen. Dann gilt*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Wir schreiben deshalb auch kurz $h \circ g \circ f$.

Beweis: Da die Definitions- und Zielbereiche der beiden Funktionen übereinstimmen, reicht es, die Abbildungsvorschrift zu überprüfen. Sei dazu $x \in M$. Dann gilt

$$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big((g \circ f)(x)\big) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x).$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 3.12 (Bijektivität = Existenz einer Umkehrabbildung)
Es sei $f : M \longrightarrow N$ *eine Abbildung.*

a. f *ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung* $g : N \longrightarrow M$ *existiert, so dass* $g \circ f = \mathrm{id}_M$ *und* $f \circ g = \mathrm{id}_N$.
b. *Die Abbildung* g *in Teil a. ist dann eindeutig bestimmt und bijektiv. Wir nennen sie die* Inverse *oder* Umkehrabbildung *von* f *und bezeichnen sie mit* f^{-1}.

Beweis:

a. **"$\Longleftarrow$":** Wir wollen zunächst zeigen, dass f surjektiv ist. Sei dazu $y \in N$ gegeben. Setze $x := g(y) \in M$. Dann gilt

$$f(x) = f\big(g(y)\big) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_N(y) = y.$$

Also ist f surjektiv.
Dann wollen wir zeigen, dass f injektiv ist. Seien dazu $x, x' \in M$ mit $f(x) = f(x')$ gegeben. Dann gilt

$$x = \mathrm{id}_M(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big) = (g \circ f)(x') = \mathrm{id}_M(x') = x'.$$

Also ist f injektiv.

"$\Longrightarrow$": Da f bijektiv ist, gibt es für jedes $y \in N$ genau ein Urbild $x_y \in M$ von y unter f, d.h. $f(x_y) = y$. Wir definieren nun eine Abbildung

$$g : N \longrightarrow M : y \mapsto x_y.$$

Dann gilt zunächst für $y \in N$

$$(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f(x_y) = y = \mathrm{id}_N(y).$$

Also ist $f \circ g = \mathrm{id}_N$.
Zudem gilt für $x \in M$ und $y := f(x) \in N$

$$f(x_y) = y = f(x).$$

Da f injektiv ist, folgt daraus $x = x_y$, und wir erhalten

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = x_y = x = \mathrm{id}_M(x).$$

Damit ist auch $g \circ f = \mathrm{id}_M$ gezeigt.

b. Sei $h : N \longrightarrow M$ eine zweite Abbildung mit $h \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ h = \mathrm{id}_N$. Dann gilt für $y \in N$

$$f\big(g(y)\big) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_N(y) = (f \circ h)(y) = f\big(h(y)\big).$$

Da f injektiv ist, folgt mithin $g(y) = h(y)$, und somit $g = h$. Die Eindeutigkeit von g ist also gezeigt. Außerdem ist g nach Teil a. auch bijektiv.

$\square$

Beispiel 3.13
Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x+1$ ist bijektiv mit $f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2}$.

Denn für $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\big(f \circ f^{-1}\big)(y) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot y - \frac{1}{2}\right) + 1 = y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(y)$$

und für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\big(f^{-1} \circ f\big)(x) = \frac{1}{2} \cdot (2x+1) - \frac{1}{2} = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x).$$

Die Behauptung folgt also aus Satz 3.12.

Proposition 3.14 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität unter Komposition)
Seien $f : M \longrightarrow N$ und $g : N \longrightarrow P$ zwei Abbildungen.

a. *Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.*
b. *Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.*
c. *Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.*

Beweis: a. Seien $x, x' \in M$ mit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Dann gilt

$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') = g(f(x')).$$

Da g injektiv ist, ist $f(x) = f(x')$, und da f injektiv ist, ist auch $x = x'$. Also ist $g \circ f$ injektiv.

b. Sei $z \in P$. Da g surjektiv ist, gibt es ein $y \in N$ mit $g(y) = z$, und da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Die Surjektivität von $g \circ f$ folgt dann aus

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

c. Wegen a. ist $g \circ f$ injektiv und wegen b. ist $g \circ f$ auch surjektiv, also bijektiv.

$\square$

Aufgaben

Aufgabe 3.15
Ist $f : M \longrightarrow N$ eine surjektive Abbildung und $y \in N$, so ist

$$g : M \setminus f^{-1}(\{y\}) \longrightarrow N \setminus \{y\} : x \mapsto f(x)$$

eine surjektive Abbildung.

Aufgabe 3.16
Es sei $f : M \longrightarrow N$ eine injektive Abbildung, $x' \in M$ und $y' = f(x') \in N$.

a. Dann ist $g : M \setminus \{x'\} \longrightarrow N \setminus \{y'\} : x \mapsto f(x)$ eine injektive Abbildung.

b. Ist f bijektiv, so ist g auch bijektiv.

Aufgabe 3.17
Für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$, $M \neq \emptyset$, beweise man die folgenden Aussagen:

a. f ist injektiv $\iff \exists\, g : N \longrightarrow M$, so dass $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

b. f ist surjektiv $\iff \exists\, g : N \longrightarrow M$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

Aufgabe 3.18
Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind:

a. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \; x \longmapsto 3x + 2$

b. $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : \; x \longmapsto 3x + 2$

c. $f_3 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; (x, y) \longmapsto (xy, x + 1)$

d. $f_4 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \; (x, y) \longmapsto (x - 2y, 2x + y)$

Aufgabe 3.19
Seien M, N zwei nicht-leere Mengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Formulieren Sie die folgende Aussage in Quantorenschreibweise und beweisen Sie sie:
f ist genau dann surjektiv, wenn für alle nicht-leeren Mengen X und für alle Abbildungen $g : N \longrightarrow X$ und $h : N \longrightarrow X$ aus $g \circ f = h \circ f$ schon $g = h$ folgt.

Aufgabe 3.20

Seien L, M, N Mengen und $f : L \longrightarrow M$, $g : M \longrightarrow N$ Abbildungen. Beweisen Sie oder widerlegen Sie - durch Gegenbeispiel - die folgenden Aussagen:

a. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

b. Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

c. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

d. Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.

Aufgabe 3.21

Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

b. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

c. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

d. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Geben Sie außerdem konkrete Beispiele dafür an, dass in b. und d. keine Gleichheit gilt.

§ 4 Vollständige Induktion

Bemerkung 4.1 (Prinzip der vollständigen Induktion)
Die folgende Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist uns wohl vertraut:

> Addiert man zur Zahl 1 sukzessive die Zahl 1, so erhält man nach und nach alle natürlichen Zahlen.

Man nennt sie das *Prinzip der vollständigen Induktion.*

Mit Hilfe der Nachfolgerfunktion $\mathrm{nf} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n+1$ können wir die Eigenschaft auch wie folgt formulieren:

> Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $\forall\, n \in M \;:\; n+1 = \mathrm{nf}(n) \in M$, so ist $M = \mathbb{N}$.

Daraus leitet sich das im folgenden Satz formulierte Beweisprinzip für Aussagen ab, die von einer natürlichen Zahl abhängen.

Satz 4.2 (Prinzip der vollständigen Induktion)
Sei $\mathcal{A}(n)$ *eine Aussageform mit zulässigen Werten* $n \in \mathbb{N}$.
Falls $\mathcal{A}(1)$ *wahr ist und* $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ *wahr ist, so ist* $\mathcal{A}(n)$ *wahr für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Setze $M := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{A}(n) \text{ wahr}\}$. Nach Voraussetzung gilt dann $1 \in M$ und für $n \in M$ folgt $n+1 \in M$. Aus dem Prinzip der Vollständigen Induktion in Bemerkung 4.1 folgt dann $M = \mathbb{N}$. Also ist $\mathcal{A}(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 4.3
Man beachte, um den Schluss $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ als wahr zu erweisen, reicht es, den Fall zu betrachten, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist, da andernfalls der Schluss ohnehin den Wahrheitswert wahr trägt.

Wir nennen:

- "$\mathcal{A}(1)$ wahr" den *Induktionsanfang*,
- "$\mathcal{A}(n)$ wird als wahr vorausgesetzt" die *Induktionsvoraussetzung* und
- "$\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$" den *Induktionsschluss.*

Beispiel 4.4
Die Zahl $n^3 - n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion und formulieren dazu zunächst unsere Aussageform $\mathcal{A}(n)$:

$$\mathcal{A}(n) : \text{Es gibt ein } k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } n^3 - n = 6 \cdot k.$$

Induktionsanfang: $n = 1$**:** $1^3 - 1 = 0 = 6 \cdot 0$. Also ist $\mathcal{A}(1)$ wahr.

Induktionsvoraussetzung: Wir setzen voraus, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n^3 - n = 6 \cdot k$.

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$: Man beachte, dass eine der beiden Zahlen n oder $n+1$ gerade sein muss, und dass deshalb die Zahl $n \cdot (n+1)$ gerade ist. Es gibt also eine natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot (n+1) = 2 \cdot l$. Damit erhalten wir dann

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3 \cdot n \cdot (n+1) = 6k + 6l = 6 \cdot (k+l).$$

Wir haben also gezeigt, dass $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist.

Also ist $\mathcal{A}(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, und das heißt, dass $n^3 - n$ stets durch 6 teilbar ist. □

Bemerkung 4.5 (Varianten der vollständigen Induktion)

a. *Alternativer Induktionsanfang*:
Statt $n = 1$ als Induktionsanfang zu wählen, kann eine beliebige ganze Zahl $n_0 \in \mathbb{Z}$ als Induktionsanfang dienen. Man erhält dann, dass $\mathcal{A}(n)$ wahr ist für alle $n \geq n_0$. Denn, man erhält alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$, indem man zu n_0 sukzessive 1 addiert.

b. *Alternative Induktionsvoraussetzung*:
Im Induktionsschritt schließen wir von $\mathcal{A}(n)$ auf $\mathcal{A}(n+1)$, d.h. wir setzen nur $\mathcal{A}(n)$ als richtig voraus und schließen daraus die Korrektheit von $\mathcal{A}(n+1)$. Stattdessen können wir auch $\mathcal{A}(k)$ für $k = n_0, \ldots, n$ als richtig voraussetzen und auf $\mathcal{A}(n+1)$ schließen (wobei $\mathcal{A}(n_0)$ der Induktionsanfang sein soll). Das ist manchmal hilfreich.

Aufgaben

Aufgabe 4.6
Zeigen Sie, dass $3^{n+1} - 3$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 4.7
Es sei $a \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass dann $a^{2n+1} - a$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe 4.8
Sei M eine Menge und betrachte folgende beide Mengen von Abbildungen:

$$A := \{f \mid f : \{0,1\} \to M \text{ Abbildung}\} \text{ und } B := \{g \mid g : M \to \{0,1\} \text{ Abbildung}\}.$$

Zeigen Sie:

a. A ist gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$.

b. B ist gleichmächtig zur Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

c. Ist M abzählbar unendlich, so ist A abzählbar unendlich.

d. Ist M abzählbar unendlich, so ist B überabzählbar.

§ 5 Mächtigkeit von Mengen

Definition 5.1 (Die Mächtigkeit von Mengen)

a. Wir nennen eine Menge M *endlich*, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält. In diesem Fall bezeichnen wir mit $\#M = |M|$ die Anzahl an Elementen in M und nennen die Zahl die *Mächtigkeit* von M. Enthält M unendlich viele Elemente, so nennen wir M *unendlich* und setzen $\#M := |M| := \infty$.

b. Zwei Mengen M und N heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \longrightarrow N$ gibt.

c. Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

d. Eine Menge heißt *überabzählbar*, wenn sie weder endlich noch abzählbar unendlich ist.

e. Für zwei ganze Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir mit

$$\{m, \ldots, n\} := \{k \in \mathbb{Z} \mid m \leq k \leq n\}$$

die Menge der ganzen Zahlen zwischen m und n. Man beachte, dass $\{m, \ldots, n\} = \emptyset$, wenn $m > n$.

Bemerkung 5.2 (Einfache Eigenschaften der Mächtigkeit endlicher Mengen)

a. Ist eine Menge endlich und enthält genau n Elemente, so können wir die Elemente in M abzählen, etwa $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ und wir erhalten so eine bijektive Abbildung

$$f : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow M : i \mapsto x_i.$$

Umgekehrt erlaubt eine solche Abbildung, die Elemente von M abzuzählen und wir erhalten $|M| = n$. Damit sehen wir, dass eine Menge genau dann endlich von Mächtigkeit n ist, wenn es eine Bijektion von $\{1, \ldots, n\}$ nach M gibt.

b. Ist M endlich und $A \subseteq M$, so ist auch A endlich und $|A| \leq |M|$.

c. Ist $M = A \mathbin{\dot\cup} B$ eine endliche Menge, so gilt $|M| = |A| + |B|$.

Wir wollen den in Bemerkung 5.2 angedeuteten Zusammenhang zwischen der Mächtigkeit einer endlichen Menge und der Existenz von Abbildungen mit bestimmten Eigenschaften im folgenden Satz vertiefen.

Satz 5.3

Es seien M und N zwei nicht-leere endliche Mengen.

a. *Genau dann gilt $|M| \leq |N|$, wenn es eine injektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.*

b. *Genau dann gilt $|M| \geq |N|$, wenn es eine surjektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.*

c. *Genau dann gilt $|M| = |N|$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.*

Beweis: Es seien $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $N = \{y_1, \ldots, y_n\}$ mit paarweise verschiedenen Elementen $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$. Es gilt $|M| = m > 0$ und $|N| = n > 0$.

a. Ist $m \leq n$, so definiere $f : M \to N$ durch $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, m$. Dann gilt für $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i \neq j$

$$f(x_i) = y_i \neq y_j = f(x_j).$$

Mithin ist f injektiv.
Ist umgekehrt $f : M \to N$ eine injektive Abbildung, so gilt $f(M) = \{f(x_1), \ldots, f(x_m)\} \subseteq N$ eine Teilmenge von paarweise verschiedenen Elementen. Mithin enthält N mindestens m Elemente, und folglich gilt $m \leq n$.

b. Ist $m \geq n$, so definiere $f : M \to N$ durch $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$ und $f(x_i) = y_1$ für $i = n+1, \ldots, m$. Dann gilt offenbar $f(M) = \{y_1, \ldots, y_n\} = N$ und f ist surjektiv.
Ist umgekehrt $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung, so gilt $\{y_1, \ldots, y_n\} = N = f(M) = \{f(x_1), \ldots, f(x_m)\}$. Mithin enthält die Menge $\{f(x_1), \ldots, f(x_m)\}$ auch n verschiedene Elemente, und folglich ist $m \geq n$.

c. Die Rückrichtung folgt unmittelbar aus den ersten beiden Teilen. Für die Hinrichtung beachte man, dass die in a. und b. definierten Abbildungen im Fall $|M| = |N|$ übereinstimmen und somit bijektiv sind.

□

Aus diesem Satz leitet sich unmittelbar ab, dass für Selbstabbildungen endlicher Mengen die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv zusammen fallen.

Korollar 5.4 (Injektiv = surjektiv = bijektiv für gleichmächtige endliche Mengen)
Es seien M und N endliche Mengen mit $|M| = |N|$. Dann sind die folgenden Aussagen für eine Abbildung $f : M \longrightarrow N$ äquivalent:

a. f *ist injektiv.*

b. f *ist surjektiv.*

c. f *ist bijektiv.*

Beweis:

a. $\Longrightarrow$ b.: Angenommen, f wäre nicht surjektiv, dann gibt es ein

$$y \in N \setminus \mathrm{Im}(f)$$

und mithin ist

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq N \setminus \{y\}.$$

Da f injektiv ist, ist $g : M \longrightarrow \mathrm{Im}(f) : x \mapsto f(x)$ nach Beispiel 3.8 bijektiv, so dass mit Satz 5.3

$$|M| \stackrel{5.3}{=} |\mathrm{Im}(f)| \leq |N| - 1 < |N| = |M|$$

folgt, was ein offensichtlicher Widerspruch ist. Mithin muss f surjektiv sein.

b. $\Longrightarrow$ **c.:** Wir müssen zeigen, dass f injektiv ist. Dazu nehmen wir an, f sei nicht injektiv. Dann gibt es $x, x' \in M$ mit $x \neq x'$ und $y := f(x) = f(x')$. Die Abbildung

$$h : M \setminus f^{-1}(\{y\}) \longrightarrow N \setminus \{y\} : z \mapsto f(z)$$

ist nach Aufgabe 3.15 surjektiv. Mithin gilt nach Satz 5.3

$$|M| - 1 \overset{\text{Vor.}}{=} |N| - 1 = |N \setminus \{y\}| \overset{5.3}{\leq} |M \setminus f^{-1}(\{y\})| \leq |M \setminus \{x, x'\}| = |M| - 2,$$

was offenbar ein Widerspruch ist. Mithin muss f injektiv sein.

c. $\Longrightarrow$ **a.:** Jede bijektive Abbildung ist auch injektiv, also ist f injektiv.

Damit haben wir die Aussage durch einen Ringschluss gezeigt. □

Nachdem wir uns bislang im wesentlichen mit endlichen Mengen beschäftigt haben, wollen wir uns nun unendlichen Mengen zuwenden und dabei zeigen, dass es unterschiedliche Qualitäten der Unendlichkeit gibt.

Proposition 5.5 (Cantorsches Diagonalverfahren)
Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.

Beweis: Wir zeigen, wie man mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$ konstruiert.

Dazu listen wir die rationalen Zahlen zunächst wie folgt auf

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & 1 & & \frac{1}{2} & \longrightarrow & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & \longrightarrow & \frac{1}{5} & & \dots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
 & & -1 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{3} & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{5} & & \dots \\
 & & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
 & & 2 & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \dots \\
 & & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
 & & -2 & & -\frac{2}{2} & & -\frac{2}{3} & & -\frac{2}{4} & & -\frac{2}{5} & & \dots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

und laufen sie dann wie angedeutet entlang der Pfeile ab. Dabei sammeln wir jede rationale Zahl, die mehrfach vorkommt, nur bei ihrem ersten Auftreten auf. Auf dem Weg erhalten wir eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}$. □

Proposition 5.6 ($\mathbb{R}$ ist überabzählbar.)
Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist überabzählbar.

Beweis: Auch dies zeigen wir mit Hilfe einer Variante des Cantorschen Diagonalverfahrens.

$\mathbb{R}$ ist sicherlich nicht endlich. Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar unendlich, so gäbe es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, und wir schreiben dann $\varphi(i)$, $i \in \mathbb{N}$, in Dezimaldarstellung (siehe auch Aufgabe 12.44):

$$\begin{array}{lclllllll}
\varphi(0) & = & a_{0,-p_0} & a_{0,-p_0+1} & \dots & \underline{a_{0,0}}, & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\
\varphi(1) & = & a_{1,-p_1} & a_{1,-p_1+1} & \dots & a_{1,0}, & \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\
\varphi(2) & = & a_{2,-p_2} & a_{2,-p_2+1} & \dots & a_{2,0}, & a_{21} & \underline{a_{22}} & a_{23} & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & \ddots &
\end{array}$$

Dann setzen wir $a := a_{00}, a_{11}a_{22}a_{33} \cdots \in \mathbb{R}$, d. h. a ist diejenige Zahl, die in obiger Aufzählung durch die unterstrichenen Diagonalelemente gegeben ist. Nun ändern wir jede der Ziffern von a ab (etwa $b_{ii} = 2$, falls $a_{ii} = 0$ und $b_{ii} = 0$ sonst) und erhalten eine Zahl

$$b = b_{00}, b_{11}b_{22}b_{33} \cdots \in \mathbb{R},$$

mit $a_{ii} \neq b_{ii}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da φ bijektiv ist, gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(i) = b$, also $a_{ii} = b_{ii}$, im Widerspruch zur Konstruktion von b. (Wir müssen noch berücksichtigen, dass $0,9999 \cdots = 1$, was aber die einzige Zweideutigkeit der Dezimaldarstellung ist, und dieser weichen wir durch unsere Wahl der b_{ii} aus.) Also ist $\mathbb{R}$ überabzählbar. □

Bemerkung 5.7 (Kontinuumshypothese)
Da $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ nicht gleichmächtig sind und $\mathbb{Q}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, stellt sich ganz natürlich die Frage, ob es eine Menge M mit $\mathbb{Q} \subsetneqq M \subsetneqq \mathbb{R}$ gibt, die weder zu $\mathbb{Q}$ noch zu $\mathbb{R}$ gleichmächtig ist. Es hat lange gedauert, bis man feststellen musste, dass die Frage auf der Grundlage des allgemein anerkannten Axiomensystems der Mengenlehre von Zermelo-Fränkel nicht entscheidbar ist. Man hat nun also die Wahl, als neues Axiom hinzuzufügen, dass es eine solche Menge gibt, oder auch, dass es keine solche Menge gibt. Die lange bestehende Vermutung, dass man schon mit den übrigen Axiomen beweisen könnte, dass es keine solche Menge gibt, ist als *Kontinuumshypothese* bekannt.

Definition 5.8 (Potenzmenge)
Es sei M eine Menge. Wir nennen die Menge

$$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$$

aller Teilmengen von M die *Potenzmenge* von M.

Beispiel 5.9
$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$, $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Proposition 5.10 (Potenzmengen endlicher Mengen)
Sei M eine endliche Menge mit $n = |M|$, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 0$**:** Dann ist $M = \emptyset$ und $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset\}$ hat genau $1 = 2^0$ Elemente.

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$: Sei also $|M| = n+1$. Wir wählen ein $y \in M$ und setzen $N = M \setminus \{y\}$, so dass $|N| = |M| - 1 = n$. Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ lässt sich nun wie folgt disjunkt aufspalten:

$$\mathcal{P}(M) = \{A \subseteq M \mid y \notin A\} \dot\cup \{A \subseteq M \mid y \in A\}.$$

Dabei ist

$$\{A \subseteq M \mid y \notin A\} = \{A \subseteq M \mid A \subseteq N\} = \mathcal{P}(N)$$

und

$$\{A \subseteq M \mid y \in A\} = \{B \cup \{y\} \subseteq M \mid B \subseteq N\} = \{B \cup \{y\} \subseteq M \mid B \in \mathcal{P}(N)\}.$$

Beide Mengen sind offenbar gleichmächtig zu $\mathcal{P}(N)$, und nach Induktionsvoraussetzung gilt $|\mathcal{P}(N)| = 2^n$. Insgesamt erhalten wir also

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Damit folgt die Aussage mittels Induktion. □

Aufgaben

Aufgabe 5.11

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich.

§ 6 Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen stellen ein sehr wichtiges *Ordnungs-* und *Konstruktionsprinzip* innerhalb der Mathematik dar, das im Verlauf der ersten Semester an einigen zentralen Stellen benötigt wird, etwa im Zusammenhang mit Faktorräumen , der Äquivalenz von Matrizen oder der Konjugation von Matrizen und der Jordanschen Normalform in der Linearen Algebra.

Definition 6.1 (Relation)
Seien M und N zwei Mengen, so nennen wir jede Teilmenge $R \subseteq M \times N$ eine *Relation* zwischen M und N.

Bemerkung 6.2
Ist R eine Relation zwischen M und N, $x \in M$ und $y \in N$, so wollen wir sagen x *steht in Relation zu* y *bezüglich* R, wenn $(x, y) \in R$. Die Menge R legt also fest, wann zwei Elemente in Relation zueinander stehen. Wir schreiben auch xRy statt $(x, y) \in R$.

Beispiel 6.3 (Abbildungen als Relationen)

a. Der Graph einer Abbildung $f : M \longrightarrow N$ ist ein Beispiel einer Relation, bei der jedes $x \in M$ zu genau einem $y \in N$ in Relation steht.

b. Ist M die Menge der Hörer der Vorlesung und N die Menge der in Tübingen studierbaren Fächer, so ist
$$R = \{(x, y) \in M \times N \mid x \text{ studiert } y\}$$
eine Relation zwischen M und N, die ganz sicher nicht Graph einer Funktion ist.

Bemerkung 6.4 (Motivation des Begriffs Äquivalenzrelation)
Der folgende Begriff der *Äquivalenzrelation* bereitet den Studenten oft extreme Schwierigkeiten. Dabei liegt auch ihm ein ganz einfaches Prinzip zugrunde, das wir zunächst an einem Beispiel erläutern wollen.

Die Gesamtheit aller Schüler einer Schule werden von der Schulleitung zwecks sinnvoller Organisation des Unterrichts in Schulklassen eingeteilt. Dabei achtet die Schulleitung darauf, dass jeder Schüler zu einer Schulklasse gehört und auch nur zu dieser einen. Etwas mathematischer ausgedrückt, die Schulleitung teilt die *Menge* S der Schüler in *paarweise disjunkte Teilmengen* K_i, $i = 1, \ldots, k$, ein, so dass wir anschließend eine *disjunkte Zerlegung*
$$S = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} K_i$$
der Menge S in die Schulklassen $K_1, \ldots, K_k$ haben. Dabei kann man für die Zugehörigkeit der Schüler Alfred, Ben und Christoph zu einer Schulklasse folgendes feststellen:

1) Alfred gehört zu einer Schulklasse.

2) Wenn Alfred in derselben Schulklasse ist wie Ben, dann ist Ben auch in derselben Schulklasse wie Alfred.
3) Wenn Alfred in derselben Schulklasse ist wie Ben und wenn zugleich Ben in derselben Schulklasse ist wie Christoph, dann ist auch Alfred in derselben Schulklasse wie Christoph.

Diese Aussagen sind so offensichtlich, dass man kaum glauben mag, daß es einen tieferen Sinn hat, sie zu erwähnen. Aber nehmen wir für einen Augenblick an, die Schulleitung hat ihre Einteilung der Schüler vorgenommen und für jede Schulklasse eine Liste mit den Namen der Schüler erstellt, die zu dieser Schulklasse gehören sollen. Nehmen wir ferner an, die Schulleitung hat noch nicht überprüft, ob jeder Schüler in genau einer Schulklasse eingeteilt ist. Dann behaupte ich, wenn man in den drei Aussagen 1)-3) die Schüler Alfred, Ben und Christoph durch beliebige Schüler ersetzt und die Aussagen richtig sind für jede Kombination der Schülernamen, dann ist sichergestellt, dass auch jeder Schüler in genau einer Schulklasse eingeteilt ist.

Als Mathematiker suchen wir nach möglichst einfachen Regeln, denen die Einteilung der Schulklassen genügen muss, um sicherzustellen, dass sie wirklich eine disjunkte Zerlegung von S ist, d.h. dass wirklich jeder Schüler in genau einer Schulklasse ist, und die Regeln 1)-3) sind genau die Regeln, die wir dazu brauchen. Wenn wir nun die Zugehörigkeit zweier Schüler x und y zur selben Klasse verstehen als "x *steht in Relation zu* y", dann definieren uns die drei Regeln 1)-3) zudem eine Teilmenge von $S \times S$, nämlich die Relation

$$R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \text{ ist in derselben Schulklasse wie } y\}.$$

Die Regeln 1)-3) lassen sich für Schüler $x, y, z \in S$ dann wie folgt formulieren:

- $(x, x) \in R$.
- Wenn $(x, y) \in R$, dann ist auch $(y, x) \in R$.
- Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, dann ist auch $(x, z) \in R$.

Eine solche Relation nennt man eine *Äquivalenzrelation*, man nennt Schüler derselben Schulklasse *äquivalent* und die Schulklassen nennt man dann auch *Äquivalenzklassen.*

Wir führen den Begriff der *Äquivalenzrelation* nun für beliebige Mengen ein.

Definition 6.5 (Äquivalenzrelation)
Es sei M eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation* auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$, so dass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

R1: $(x, x) \in R$, ("Reflexivität")
R2: $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$, ("Symmetrie")
R3: $(x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$. ("Transitivität")

Bei Äquivalenzrelationen hat sich eine alternative Schreibweise zu $(x, y) \in R$ durchgesetzt, die auch wir im folgenden verwenden wollen.

Notation 6.6 (Schreibweise $\sim$ für Äquivalenzrelationen)
Sei M eine Menge und R eine Äquivalenzrelation auf M. Wir definieren für $x, y \in M$

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad (x, y) \in R,$$

und wir sprechen dann meist von der Äquivalenzrelation "$\sim$" statt R, sofern keine Missverständnisse zu befürchten sind.

Mit dieser Schreibweise lassen sich die drei Axiome in Definition 6.5 wie folgt formulieren. Für $x, y, z \in M$ soll gelten:

- **R1:** $x \sim x$, ("Reflexivität")
- **R2:** $x \sim y \implies y \sim x$, ("Symmetrie")
- **R3:** $x \sim y, y \sim z \implies x \sim z$. ("Transitivität")

Definition 6.7 (Äquivalenzklassen)
Es sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M. Für $x \in M$ heißt die Menge

$$\overline{x} := \{y \in M \mid y \sim x\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x. Jedes $y \in \overline{x}$ heißt ein *Repräsentant* der Klasse $\overline{x}$. Mit

$$M/\sim := \left\{\overline{x} \mid x \in M\right\}$$

bezeichnen wir die Menge der *Äquivalenzklassen modulo der Äquivalenzrelation* $\sim$.

Beispiel 6.8 (Der Abstand vom Ursprung als Äquivalenzrelation)
Wir betrachten die Menge $M = \mathbb{R}^2$ der Punkte in der reellen Zahlenebene und wir bezeichnen mit $|P|$ den Abstand von P zum Ursprung $(0, 0)$. Für zwei Punkte $P, Q \in M$ definieren wir

$$P \sim Q \quad \Longleftrightarrow \quad |P| = |Q|,$$

d.h. wir nennen die Punkte *äquivalent*, falls ihr Abstand zum Ursprung gleich ist. Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

- **R1:** Sei $P \in M$, dann ist $|P| = |P|$, also $P \sim P$.
- **R2:** Falls $P, Q \in M$ mit $P \sim Q$, dann ist $|P| = |Q|$ und somit auch $|Q| = |P|$. Damit gilt aber $Q \sim P$.
- **R3:** Falls $P, Q, R \in M$ mit $P \sim Q$ und $Q \sim R$, dann gilt $|P| = |Q|$ und $|Q| = |R|$. Aber damit gilt auch $|P| = |R|$ und somit $P \sim R$.

Die Äquivalenzklasse

$$\overline{P} = \{Q \in M \mid |Q| = |P|\}$$

von $P \in M$ ist der Kreis um den Ursprung vom Radius $|P|$.

Wir haben anfangs behauptet, dass die drei Axiome einer Äquivalenzrelation sicherstellen, dass die zugehörigen Äquivalenzklassen eine disjunkte Zerlegung von M induzieren, und umgekehrt, dass jede disjunkte Zerlegung eine Äquivalenzrelation mit sich bringt. Dies wollen wir im Folgenden beweisen. Dazu sollten wir zunächst den Begriff disjunkt klären.

Proposition 6.9 (Die Äquivalenzrelation zu einer disjunkten Zerlegung)
Ist $(M_i)_{i\in I}$ *eine disjunkte Zerlegung von* M *und definieren wir eine Relation auf* M *durch*

$$x \sim y \iff \exists\, i \in I\, :\, x, y \in M_i,$$

dann ist $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf* M.

Beweis: Ist $x \in M = \dot\bigcup_{i\in I} M_i$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x \in M_i$ und somit gilt $x \sim x$. $\sim$ ist also reflexiv.

Sind $x, y \in M$ mit $x \sim y$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x, y \in M_i$. Dann gilt aber auch $y \sim x$. Die Relation ist also symmetrisch.

Sind $x, y, z \in M$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, so gibt es $i, j \in I$ mit $x, y \in M_i$ und $y, z \in M_j$. Da die Zerlegung disjunkt ist und $y \in M_i \cap M_j$, folgt $M_i = M_j$. Also gilt $x, z \in M_i$ und somit $x \sim z$. $\sim$ ist also auch transitiv. □

Proposition 6.10 (Die disjunkte Zerlegung zu einer Äquivalenzrelation)
Es sei M *eine Menge. Ist* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf* M, *dann bilden die Äquivalenzklassen eine disjunkte Zerlegung von* M, *d. h. jedes* $x \in M$ *liegt in genau einer Äquivalenzklasse.*

Insbesondere gilt für Äquivalenzklassen $\overline{x}$ *und* $\overline{y}$ *entweder* $\overline{x} = \overline{y}$ *oder* $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig. Aus $x \sim x$ folgt $x \in \overline{x} \subseteq \bigcup_{\overline{y}\in M/\sim} \overline{y}$. Mithin gilt

$$M = \bigcup_{\overline{y}\in M/\sim} \overline{y}.$$

Es bleibt also zu zeigen, dass die Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind.

Seien $\overline{x}, \overline{y} \in M/\sim$ mit $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, und es gilt $z \sim x$ und $z \sim y$. Wegen der Symmetrie gilt aber auch $x \sim z$ und mittels der Transitivität dann $x \sim y$. Sei nun $u \in \overline{x}$ beliebig, dann gilt $u \sim x$ und wieder wegen der Transitivität $u \sim y$. Also $u \in \overline{y}$ und damit $\overline{x} \subseteq \overline{y}$. Vertauschung der Rollen von x und y in der Argumentation liefert schließlich $\overline{x} = \overline{y}$. □

Korollar 6.11 (Äquivalenzrelationen auf endlichen Mengen)
Sei M *eine endliche Menge,* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf* M *und* $M_1, \ldots, M_s$ *seien die paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen von* $\sim$. *Dann gilt:*

$$|M| = \sum_{i=1}^{s} |M_i|.$$

Beweis: Mit M sind auch alle M_i endlich und die Behauptung folgt aus Proposition 6.10 und Bemerkung 5.2. □

Ein Beispiel aus dem Alltag für eine Äquivalenzrelation haben wir oben bereits gesehen. Ein weiteres wichtiges und wohlbekanntes Beispiel sind die rationalen Zahlen! Ein Bruch ist nichts weiter als die Äquivalenzklasse eines Tupels von ganzen Zahlen, und das Kürzen des Bruches, z.B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, ist nur die Wahl eines möglichst einfachen Repräsentanten.

Beispiel 6.12 (Die rationalen Zahlen)
Man kann die rationalen Zahlen wie folgt als Äquivalenzklassen von Paaren ganzer Zahlen definieren. Für $(p,q),(p',q') \in M := \mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} \setminus \{0\}\big)$ definiere

$$(p,q) \sim (p',q') \quad :\Longleftrightarrow \quad pq' = p'q.$$

Wir wollen nun zeigen, dass hierdurch wirklich eine Äquivalenzrelation auf M definiert wird. Seien dazu $x = (p,q), x' = (p',q'), x'' = (p'',q'') \in M$ gegeben:[1]

R1: Für die Reflexivität müssen wir $x \sim x$ zeigen. Nun gilt aber $pq = pq$, woraus $x = (p,q) \sim (p,q) = x$ folgt.

R2: Für die Symmetrie nehmen wir an, dass $x \sim x'$ gilt und müssen $x' \sim x$ folgern. Wegen $x \sim x'$ gilt aber nach Definition $pq' = p'q$, und folglich auch $p'q = pq'$. Letzteres bedeutet aber, dass $x' = (p',q') \sim (p,q) = x$.

R3: Für die Transitivität nehmen wir schließlich an, dass $x \sim x'$ und $x' \sim x''$ gilt, und müssen daraus schließen, dass $x \sim x''$. Wegen $x \sim x'$ gilt nun aber $pq' = p'q$, und wegen $x' \sim x''$ gilt $p'q'' = p''q'$. Multiplizieren wir die erste der Gleichungen mit q'' und die zweite mit q, so erhalten wir

$$pq'q'' = p'qq'' = p'q''q = p''q'q.$$

Da nach Voraussetzung $q' \neq 0$, können wir beide Seiten der Gleichung durch q' teilen und erhalten:

$$pq'' = p''q.$$

Das wiederum bedeutet, dass $x = (p,q) \sim (p'',q'') = x''$ gilt.

Die drei Axiome einer Äquivalenzrelation sind also erfüllt.

Wir setzen nun $\mathbb{Q} := M/\sim$ und für $(p,q) \in M$ setzen wir $\frac{p}{q} := \overline{(p,q)}$, d. h. die rationale Zahl $\frac{p}{q}$ ist die Äquivalenzklasse des Paares (p,q) unter der obigen Äquivalenzrelation. Dann bedeutet die Definition von $\sim$ soviel wie, dass $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ gleich sind, wenn die kreuzweisen Produkte von Zähler und Nenner, pq' und $p'q$, übereinstimmen, oder in der vielleicht etwas bekannteren Formulierung, wenn die Brüche nach *Erweitern* mit q' bzw. mit q übereinstimmen: $\frac{p}{q} = \frac{pq'}{qq'} \stackrel{!}{=} \frac{p'q}{q'q} = \frac{p'}{q'}$.

---

[1] Man sollte sich nicht dadurch verwirren lassen, dass die Elemente von M nun selbst schon Zahlenpaare sind! Wollte man die Relation als Teilmenge von $M \times M$ schreiben, so müsste man

$$R = \big\{\big((p,q),(p',q')\big) \in M \times M \;\big|\; pq' = p'q\big\}$$

betrachten. Das erläutert vielleicht auch, weshalb wir die *alternative* Schreibeweise bevorzugen – solche Paare von Paaren werden doch leicht unübersichtlich.

Auch die Rechenregeln für rationale Zahlen lassen sich mit Hilfe der Äquivalenzklassen definieren. Für $(p, q), (r, s) \in M$ definiere:

$$\overline{(p,q)} + \overline{(r,s)} := \overline{(ps+qr, qs)},$$
$$\overline{(p,q)} \cdot \overline{(r,s)} := \overline{(pr, qs)}.$$

In Anlehnung an unser erstes Beispiel, der Einteilung der Schüler in Schulklassen, kann man das obige Rechenprinzip als "Rechnen mit Klassen" bezeichnen. Will man zwei Klassen addieren (bzw. multiplizieren), so nimmt man aus jeder der Klassen ein Element, addiert (bzw. multipliziert) diese Elemente und schaut, in welche Klasse das Resultat gehört. Diese Klasse ist dann die Summe (bzw. das Produkt) der beiden Klassen.

Was man sich bei diesem Vorgehen allerdings klar machen muss, ist, dass das Ergebnis nicht von der Wahl der Repräsentanten (d.h. der Elemente aus den Klassen) abhängt. Man spricht davon, dass die Operation *wohldefiniert* ist. Wir führen das für die Addition der rationalen Zahlen vor.

Sind $(p', q') \in \overline{(p,q)}$ und $(r', s') \in \overline{(r,s)}$ andere Repräsentanten, dann gilt $p'q = q'p$ und $r's = s'r$. Es ist zu zeigen, dass $(p's' + q'r', q's') \in \overline{(ps+qr, qs)}$ gilt. Ausmultiplizieren liefert

$$(p's' + q'r')(qs) = p'qs's + q'qr's = q'ps's + q'qs'r = (ps+qr)(q's'),$$

was zu zeigen war. □

Aufgaben

Aufgabe 6.13
Wir definieren für zwei Punkte $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \sim (x',y') \quad :\Longleftrightarrow \quad |x| + |y| = |x'| + |y'|.$$

Zeige, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$. Zeichne die Äquivalenzklassen zu $(1, 1)$ und zu $(-2, 3)$ in die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ ein.

Aufgabe 6.14 (Die ganzen Zahlen)
Es sei $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $m = (a, b) \in M$ und $m' = (a', b') \in M$ seien zwei Elemente in M. Wir definieren

$$m \sim m' \quad \Longleftrightarrow \quad a + b' = a' + b.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und dass die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\Phi : \mathbb{Z} \longrightarrow M/\sim : z \mapsto \begin{cases} \overline{(z,0)}, & \text{falls } z \geq 0, \\ \overline{(0,-z)}, & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 6.15 (Die projektive Gerade)
Wir definieren für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$v \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, v = \lambda \cdot w$$

wobei $\lambda \cdot w := (\lambda \cdot w_1, \lambda \cdot w_2)$.

a. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist. Es ist üblich die Äquivalenzklasse $\overline{(v_1, v_2)}$ von (v_1, v_2) mit $(v_1 : v_2)$ zu bezeichnen, und man nennt die Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen die *projektive Gerade* über $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie mit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.
b. Die Menge $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ist Kreis vom Radius Eins um den Mittelpunkt $(0,0)$. Zeigen Sie, dass die Abbilung

$$\Phi : S^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} : (x,y) \mapsto \overline{(x,y)}$$

surjektiv ist.
c. Wenn wir in der Definition von $\sim$ alle Elemente $v, w \in \mathbb{R}^2$ zulassen, definiert $\sim$ dann eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$? Falls ja, was ist die Äquivalenzklasse von $(0,0)$?

Aufgabe 6.16 (Kongruenz modulo n)
Ist $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine positive ganze Zahl, so definieren wir für $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \equiv y \ :\Longleftrightarrow\ x - y \text{ ist ein Vielfaches von } n.$$

Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist mit genau den n paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$.

Man nennt zwei äquivalente Zahlen x und y dann auch *kongruent modulo* n. Diese Äquivalenzrelation wird in der Vorlesung algebraische Strukturen genauer untersucht.

§ 7 Gruppen und Körper

A) Gruppen

Definition 7.1 (Gruppen)

a. Eine *Gruppe* ist ein Paar $(G,*)$ bestehend aus einer *nicht-leeren* Menge G und einer zweistelligen Operation "$*$", d. h. einer Abbildung

$$*: G \times G \to G : (g,h) \mapsto g*h,$$

so dass die folgenden *Gruppenaxiome* gelten:

G1: $(g*h)*k = g*(h*k) \quad \forall\, g,h,k \in G,$ ("Assoziativgesetz")

G2: $\exists\, e \in G \;:\; \forall\, g \in G \;:\; e*g = g,$ ("Existenz eines Neutralen")

G3: $\forall\, g \in G\; \exists\, g^{-1} \in G \;:\; g^{-1}*g = e.$ ("Existenz von Inversen")

Ein Element mit der Eigenschaft von e nennt man *neutrales Element* der Gruppe G. Ein Element mit der Eigenschaft von g^{-1} nennt man ein *Inverses zu* g.

b. Eine Gruppe $(G,*)$ heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn $(G,*)$ zudem noch dem folgenden Axiom genügt:

G4: $g*h = h*g \quad \forall\, g,h \in G$ ("Kommutativgesetz")

Beispiel 7.2

a. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$ und $(\mathbb{R},+)$ mit der üblichen Addition als Gruppenoperation sind abelsche Gruppen. Die Zahl Null erfüllt jeweils die Rolle eines neutralen Elements, und zu einer Zahl g existiert mit $-g$ ein inverses Element.

b. $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ und $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ mit der üblichen Multiplikation als Gruppenoperation sind ebenfalls abelsche Gruppen. Die Zahl 1 ist jeweils ein neutrales Element, und zu einer Zahl g existiert als inverses Element die Zahl $\frac{1}{g}$.

c. Ist M eine Menge, so ist die Menge

$$\mathrm{Sym}(M) := \{f : M \longrightarrow M \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

mit der Komposition von Abbildungen als Gruppenoperation eine Gruppe. Die Assoziativität von "$\circ$" haben wir in Proposition 3.11 gezeigt, die Identität ist das neutrale Element und in Satz 3.12 haben wir gezeigt, dass jede bijektive Abbildung ein Inverses besitzt. Wir nennen $(\mathrm{Sym}(M),\circ)$ die *symmetrische Gruppe* auf M. Enthält M mehr als zwei Elemente, so ist $\mathrm{Sym}(M)$ nicht abelsch.

Bemerkung 7.3

Es sei $(G,*)$ eine Gruppe.

a. Das neutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt und hat die Eigenschaft:

$$e*g = g*e = g \quad \forall\, g \in G.$$

b. Sei $g \in G$. Das inverse Element g^{-1} zu g ist eindeutig bestimmt und hat die Eigenschaft:

$$g^{-1}*g = g*g^{-1} = e.$$

c. Für $g, h \in G$ gelten $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$ und $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$.

d. Wird die Gruppenoperation als Multiplikation und mit "$\cdot$" bezeichnet, so schreiben wir für das Neutrale Element meist 1 und für das Inverse zu g weiterhin g^{-1} oder $\frac{1}{g}$.
Wird die Gruppenoperation als Addition und mit "+" bezeichnet, so schreiben wir für das Neutrale Element meist 0 und für das Inverse zu g meist $-g$. Zudem schreiben wir statt $g + (-h)$ in aller Regel $g - h$.

e. In Ermangelung eines besseren Namens nennen wir auch "$*$" oft einfach die *Gruppenmultiplikation*.

Die Aussagen in der Bemerkung werden in Vorlesungen zur (Linearen) Algebra bewiesen. Für den interessierten Leser fügen wir hier einen Beweis ein.

Beweis von Bemerkung 7.3: Da wir für das Paar $(G, *)$ die Axiome G1-G3 aus Definition 7.1 voraussetzen, gibt es ein neutrales Element $e \in G$, und zu beliebigem, aber fest gegebenem $g \in G$ gibt es ein Inverses $g^{-1} \in G$.

Wir wollen zunächst zeigen, dass für dieses e und dieses g^{-1} die in a. und b. geforderten zusätzlichen Eigenschaften gelten.

Da $(G, *)$ eine Gruppe ist, gibt es ein $(g^{-1})^{-1} \in G$ mit

$$(g^{-1})^{-1} * g^{-1} = e. \tag{2}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} g * g^{-1} &\overset{G2}{=} e * \left(g * g^{-1}\right) \overset{(2)}{=} \left((g^{-1})^{-1} * g^{-1}\right) * \left(g * g^{-1}\right) \overset{G1}{=} (g^{-1})^{-1} * \left(g^{-1} * (g * g^{-1})\right) \\ &\overset{G1}{=} (g^{-1})^{-1} * \left((g^{-1} * g) * g^{-1}\right) \overset{G3}{=} (g^{-1})^{-1} * \left(e * g^{-1}\right) \overset{G2}{=} (g^{-1})^{-1} * g^{-1} \overset{(2)}{=} e. \end{aligned} \tag{3}$$

Damit ist gezeigt, dass g^{-1} die zusätzliche Eigenschaft in b. erfüllt, und wir erhalten:

$$g * e \overset{G3}{=} g * \left(g^{-1} * g\right) \overset{G1}{=} \left(g * g^{-1}\right) * g \overset{(3)}{=} e * g \overset{G2}{=} g. \tag{4}$$

Nun war aber g ein beliebiges Element in G, so dass damit die zusätzliche Eigenschaft von e in a. gezeigt ist.

Sei nun $\tilde{e} \in G$ irgendein Element mit der Eigenschaft des Neutralen, d.h.

$$\tilde{e} * h = h \tag{5}$$

für alle $h \in G$. Wir müssen zeigen, dass $e = \tilde{e}$ gilt. Da wir bereits wissen, dass e die zusätzliche Eigenschaft in a. erfüllt, können wir diese, d.h. (4), mit $\tilde{e}$ in der Rolle von g anwenden, und anschließend (5) mit e in der Rolle von h:

$$\tilde{e} \overset{(4)}{=} \tilde{e} * e \overset{(5)}{=} e.$$

Schließlich müssen wir noch zeigen, wenn $\tilde{g}^{-1} \in G$ ein weiteres inverses Element zu g ist, d.h. wenn

$$\tilde{g}^{-1} * g = e \tag{6}$$

gilt, dann ist schon $g^{-1} = \tilde{g}^{-1}$. Wenden wir das bislang Gezeigte an, so gilt:

$$\tilde{g}^{-1} \overset{(4)}{=} \tilde{g}^{-1} * e \overset{(3)}{=} \tilde{g}^{-1} * \left(g * g^{-1}\right) \overset{G1}{=} \left(\tilde{g}^{-1} * g\right) * g^{-1} \overset{(6)}{=} e * g^{-1} \overset{G2}{=} g^{-1}.$$

Damit sind die Aussagen in Teil a. und b. gezeigt und es bleibt noch, die Aussagen in Teil c. zu zeigen.

Um die erste Gleichheit zu zeigen, reicht es wegen der Eindeutigkeit des Inversen zu g^{-1} zu zeigen, dass g die Eigenschaft *des* Inversen zu g^{-1} besitzt. Beim Beweis können wir die Gruppenaxiome sowie die in a. und b. bewiesenen zusätzlichen Eigenschaften des Inversen anwenden:

$$g * g^{-1} \overset{b.}{=} e.$$

Also ist g ein Inverses zu g^{-1}, und damit gilt wie angedeutet wegen der Eindeutigkeit des Inversen zu g^{-1}:

$$\left(g^{-1}\right)^{-1} = g.$$

Analog ist nach Voraussetzung $(gh)^{-1}$ ein Inverses zu gh, und es reicht wegen der Eindeutigkeit des Inversen zu gh zu zeigen, dass $h^{-1}g^{-1}$ ebenfalls die Eigenschaft eines Inversen zu gh hat:

$$\begin{aligned}\left(h^{-1} * g^{-1}\right) * (g * h) &\overset{G1}{=} h^{-1} * \left(g^{-1} * (g * h)\right) \overset{G1}{=} h^{-1} * \left(\left(g^{-1} * g\right) * h\right) \\ &\overset{G3}{=} h^{-1} * (e * h) \overset{G2}{=} h^{-1} * h \overset{G3}{=} e.\end{aligned}$$

Mithin ist $h^{-1} * g^{-1}$ ein Inverses zu gh, und somit

$$(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}.$$

Damit sind nun alle Aussagen der Bemerkung bewiesen. □

Lemma 7.4 (Kürzungsregeln)
Sei $(G, *)$ *eine Gruppe,* $g, a, b \in G$*. Dann gelten die* Kürzungsregeln*:*

a. $g * a = g * b \implies a = b$, *und*

b. $a * g = b * g \implies a = b$.

Beweis: Die erste Kürzungsregel folgt durch Multiplikation mit dem Inversen zu g von links:

$$\begin{aligned}a \overset{G2}{=} e * a \overset{G3}{=} \left(g^{-1} * g\right) * a &\overset{G1}{=} g^{-1} * (g * a) \\ &\overset{\text{Vor.}}{=} g^{-1} * (g * b) \overset{G1}{=} \left(g^{-1} * g\right) * b \overset{G3}{=} e * b \overset{G2}{=} b.\end{aligned}$$

Entsprechend folgt die zweite Kürzungsregel durch Multiplikation mit g^{-1} von rechts und unter Berücksichtigung der zusätzlichen Eigenschaft des Inversen in Bemerkung 7.3. Die Details überlassen wir dem Leser. □

B) Körper

Definition 7.5 (Körper)
Ein *Körper* ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge K zusammen mit zwei zweistelligen Operationen

$$+ : K \times K \to K : (x, y) \mapsto x + y, \qquad (\text{“}\textit{Addition}\text{”})$$

und

$$\cdot : K \times K \to K : (x, y) \mapsto x \cdot y, \qquad (\text{“}\textit{Multiplikation}\text{”})$$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

a. $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0.
b. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.
c. Es gilt das *Distributivgesetz* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für $x, y, z \in K$.

Ist eine Teilmenge $L \subseteq K$ eines Körpers mit den *gleichen* Operationen wieder selbst ein Körper, so nennen wir L einen *Teilkörper* von K.

Beispiel 7.6 (Die endlichen Körper $\mathbb{F}_p$)

a. Die rationalen Zahlen $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit der üblichen Addition und Multiplikation sind Körper. $\mathbb{Q}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$.
b. Die ganzen Zahlen $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sind kein Körper, da z.B. der Zahl 2 ein multiplikatives Inverses fehlt.
c. Auf der Menge $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ definieren wir zwei Operationen durch folgende Additions- und Multiplikationstafeln:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Mit ein wenig Aufwand kann man nachrechnen, dass alle Körperaxiome erfüllt sind und dass mithin $\mathbb{F}_2$ ein Körper ist. $\mathbb{F}_2$ ist der kleinstmögliche Körper, da nach Definition ein Körper stets mindestens zwei Elemente, nämlich ein Neutrales bezüglich der Addition und ein davon verschiedenes Neutrales bezüglich der Multiplikation enthalten muss. Man beachte auch, dass aufgrund von Lemma 7.8 keine andere Möglichkeit für die obigen Verknüpfungstafeln besteht, wenn man einen Körper mit genau zwei Elementen haben möchte. — Beachten Sie auch, dass $\mathbb{F}_2$ kein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist, da das Ergebnis von $1 + 1$ in den beiden Körpern nicht übereinstimmt.

d. Allgemeiner zeigt man in Vorlesungen zur (Linearen) Algebra, dass man für eine Primzahl p die Menge

$$\mathbb{F}_p := \{0, 1, \ldots, p - 1\}$$

auf folgende Weise zu einem Körper machen kann. Für eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}_0$ können wir Division mit Rest durch die Zahl p durchführen. Wir erhalten dann eindeutig bestimmte Zahlen $q \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq r < p$ mit

$$a = q \cdot p + r.$$

Die Zahl r heißt der Rest von a bei Division mit Rest durch p, und wir bezeichnen sie $r(a : p)$.
Mit dieser Notation definieren wir für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{F}_p$

$$a + b := r(a + b : p)$$

und

$$a \cdot b := r(a \cdot b : p),$$

wobei das "+" bzw. das "·" auf der rechten Seite jeweils die Operation in den ganzen Zahlen bezeichnet, während das "+" und das "·" auf der linken Seite neu definierte Operationen sind. Formal wäre es besser, für diese neuen Operationen neue Symbole zu verwenden, etwa "$\oplus$" und "$\otimes$", aber Mathematiker sind bequeme Menschen und schreiben nur ungerne mehr als nötig. Deshalb bleiben wir bei den bewährten Symbolen und müssen nur drauf achten, wo wir gerade rechnen. Jedenfalls gilt, dass $\mathbb{F}_p$ mit diesen beiden Operationen ein Körper ist.
Man beachte auch, dass in $\mathbb{F}_p$ für jede Primzahl p stets

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\text{p—mal}} = r(p : p) = 0$$

gilt! Damit ist auch das Negative einer Zahl $a \in \mathbb{F}_p$ leicht zu berechnen als $p - a$, hingegen ist das multiplikative Inverse $\frac{1}{a}$ einer Zahl $0 \neq a \in \mathbb{F}_p$ nicht so ohne weiteres anzugeben. Man lernt in der (Linearen) Algebra, wie man dieses mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' berechnen kann.
Z.B., gilt in $\mathbb{F}_5$

$$3 + 4 = r(3 + 4 : 5) = r(7 : 5) = 2$$

und

$$3 \cdot 4 = r(3 \cdot 4 : 5) = r(12 : 5) = 2.$$

In der (Linearen) Algebra schreibt man übrigens oft $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_p$ anstatt $\mathbb{F}_p$, und die Zahl a wird dort meist mit $\overline{a}$ oder $[a]$ bezeichnet. Das liegt daran, dass man den Körper mit der Menge der Äquivalenzklassen der Kongruenz modulo p identifizieren kann (siehe Aufgabe 6.16).

Notation 7.7

Ist K ein Körper und sind $x, y, z \in K$ mit $z \neq 0$, so schreiben wir statt $x + (-y)$ in aller Regel $x - y$, und statt $x \cdot z^{-1}$ schreiben wir oft $\frac{x}{z}$. Außerdem schreiben wir statt $x \cdot y$ meist nur xy.

Lemma 7.8 (Rechenregeln)
Es sei K *ein Körper,* $x, y, z \in K$ *und* $u, v \in K \setminus \{0\}$.

a. $-(-x) = x$,

b. $x + y = z \iff x = z - y$,

c. $-(x + y) = -x - y$,

d. $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$,

e. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$,

f. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,

g. $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$.

h. $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$, *für* $x \neq 0$,

i. $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ *oder* $y = 0$,

j. $z \cdot x = z \cdot y,\ z \neq 0 \implies x = y$,

k. $\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \frac{x \cdot y}{u \cdot v}$,

l. $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{x \cdot v + y \cdot u}{u \cdot v}$.

Beweis: Die Aussagen a., b., c. und h. folgen unmittelbar aus Bemerkung 7.3 und Lemma 7.4.

d. Für $x \in K$ gilt $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, also folgt $0 \cdot x = 0$ mittels der Kürzungsregeln in $(K, +)$. Analog sieht man $x \cdot 0 = 0$.

e. Für $x, y \in K$ gilt wegen d.:
$$x \cdot y + (-x) \cdot y = (x - x) \cdot y = 0 \cdot y = 0,$$
also $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$. Die Gleichheit des Ausdrucks zu $x \cdot (-y)$ folgt analog.

f. Für $x, y \in K$ folgt unter Zuhilfenahme von a. und e.:
$$(-x) \cdot (-y) = -\big(x \cdot (-y)\big) = -\big(-(x \cdot y)\big) = x \cdot y.$$

g. Für $x, y, z \in K$ impliziert e.:
$$x \cdot (y - z) = x \cdot y + x \cdot (-z) = x \cdot y + \big(-(x \cdot z)\big) = x \cdot y - x \cdot z.$$

i. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so ist nach d. auch $x \cdot y = 0$. Ist $x \neq 0$ und $y \neq 0$, so ist $x \cdot y \in K \setminus \{0\}$, da $K \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist.

j. Die Aussage zeigt man genau wie die Kürzungsregeln für Gruppen (siehe Lemma 7.4).

k. Unter Beachtung der Assoziativität und Kommutativität der Multiplikation sowie der Notation 7.7 gilt
$$\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} = \left(x \cdot u^{-1}\right) \cdot \left(y \cdot v^{-1}\right) = (x \cdot y) \cdot (u \cdot v)^{-1} = \frac{x \cdot y}{u \cdot v}.$$

l. Dies geht analog zu k. mit etwas mehr Schreibarbeit.

□

Notation 7.9 (Produkte und Summen)
Es sei K ein Körper und $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n \in K$ seien $n-m+1$ Elemente in K, $m, n \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot \ldots \cdot x_n$$

für das *Produkt* der Zahlen $x_m, \ldots, x_n$ und

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + \ldots + x_n$$

für die *Summe* der Zahlen $x_m, \ldots, x_n$. Wir einigen uns dabei darauf, daß das leere Produkt (d.h. ein Produkt, bei dem der obere Index n kleiner als der untere Index m ist) den Wert 1 hat und die leere Summe den Wert 0.

Außerdem definieren wir für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die *Potenzen* von x durch

$$x^n := \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n-\text{mal}} = \prod_{i=1}^{n} x$$

falls $n \geq 1$ sowie $x^0 := 1$. Ist zudem $x \neq 0$, so definieren wir

$$x^{-n} := \left(x^{-1}\right)^n = \underbrace{x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{n-\text{mal}} = \frac{1}{x^n}.$$

Analog dazu setzen wir

$$n \cdot x := \underbrace{x + \ldots + x}_{n-\text{mal}} = \sum_{i=1}^{n} x$$

und

$$(-n) \cdot x := n \cdot (-x) = \underbrace{(-x) + \ldots + (-x)}_{n-\text{mal}}$$

für $n \geq 1$, sowie $0 \cdot x = 0$.

Bemerkung 7.10 (Rekursionsprinzip)
Dem Prinzip der vollständigen Induktion ist das *Rekursionsprinzip* eng verwandt. Wollen wir einen Ausdruck für alle natürlichen Zahlen definieren, so definieren wir ihn für die Zahl 0 und führen die Definition für die Zahl n auf die Definition für die Zahl $n-1$ zurück.

Die Notation mit Punkten "$\ldots$" in Notation 7.9 ist stets eine versteckte Induktion oder Rekursion. Formal korrekt wäre es das Produkt rekursiv zu definieren durch $\prod_{i=m}^{m} x_i := x_m$ und $\prod_{i=m}^{n} x_i := \left(\prod_{i=m}^{n-1} x_i\right) \cdot x_n$. Analog sollte man die Summe rekursiv definieren durch $\sum_{i=m}^{m} x_i := x_m$ und $\sum_{i=m}^{n} x_i := \left(\sum_{i=m}^{n-1} x_i\right) + x_n$. Und für die Definition von x^n und $n \cdot x$ gilt Entsprechendes.

Beispiel 7.11 (Gauß)
Die Summe der nichtnegativen ganzen Zahlen bis zu einer gegebenen Zahl n ist

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Man beweist die Aussage durch Induktion nach n, wobei sie für $n = 0$ offenbar richtig ist. Nehmen wir nun an, daß sie für n gilt, so folgt

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \overset{\text{Ind}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}.$$

Also gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

Satz 7.12 (Endliche geometrische Reihe)
Ist K ein Körper, $1 \neq q \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Beweis: Der Beweis ist eine einfache Anwendung des Prinzips der vollständigen Induktion. □

Definition 7.13 (Fakultät)
Für eine nichtnegative ganze Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* durch

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot \ldots \cdot n,$$

falls $n \geq 1$, und durch $0! := 1$.

Für zwei nichtnegative ganze Zahlen $k, n \in \mathbb{N}_0$ erklären wir den *Binomialkoeffizienten* von n über k durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1},$$

falls $0 \leq k \leq n$, und durch $\binom{n}{k} := 0$ sonst.

Proposition 7.14 (Binomialkoeffizienten)
Es seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ nichtnegative ganze Zahlen. Dann gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Beweis: Wir unterscheiden mehrere Fälle.

1. Fall: $k = 0$:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} = 1 = 0 + 1 = \binom{n}{-1} + \binom{n}{0} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

2. Fall: $k = n+1$:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1} = 1 = 1 + 0 = \binom{n}{n} + \binom{n}{n+1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

3. Fall: $k > n+1$:

$$\binom{n+1}{k} = 0 = 0 + 0 = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

4. Fall: $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} =& \frac{n!}{(n+1-k)! \cdot (k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}\\ =& \frac{n! \cdot k}{(n+1-k)! \cdot k!} + \frac{n! \cdot (n+1-k)}{(n+1-k)! \cdot k!}\\ =& \frac{n! \cdot (k+n+1-k)}{(n+1-k)! \cdot k!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)! \cdot k!} = \binom{n+1}{k}.\end{aligned}$$

□

Satz 7.15 (Binomischer Lehrsatz)
Es sei K *ein Körper,* $x, y \in K$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$*, so gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 0$**:** Nach Definition gilt

$$(x+y)^0 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot x^k \cdot y^{0-k}.$$

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$**:** Es gilt

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} =& (x+y)^n \cdot (x+y) = (x+y)^n \cdot x + (x+y)^n \cdot y\\ \overset{\text{Ind.}}{=}& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}\\ =& x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^{k+1} \cdot y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}\\ =& x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}\\ \overset{7.14}{=}& x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k} + y^{n+1}\\ =& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n+1-k}\end{aligned}$$

Die Aussage folgt damit aus dem Prinzip der vollständigen Induktion. □

Bemerkung 7.16 (Pascalsches Dreieck)
Man ordnet die Binomialkoeffizienten gerne in der folgenden Form an, die als Pascalsches Dreieck bekannt ist:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Berechnet man die Werte der Binomialkoeffizienten, erhält man die folgende Gestalt:

$$\begin{array}{lccccccccc}
\text{0. Zeile:} & & & & & 1 & & & & \\
\text{1. Zeile:} & & & & 1 & & 1 & & & \\
\text{2. Zeile:} & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
\text{3. Zeile:} & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\text{4. Zeile:} & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

Aufgrund von Proposition 7.14 kann man die Einträge der $n+1$-ten Zeile aus den Einträgen der n-ten Zeile berechnen. Graphisch im Pascalschen Dreieck nimmt die Proposition folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n}{k-1} & + & \binom{n}{k} \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & \binom{n+1}{k} &
\end{array}$$

D.h. die Summe zweier benachbarter Einträge der n-ten Zeile liefert den mittig unter ihnen stehenden Eintrag der $n+1$-ten Zeile.

Aufgrund des binomischen Lehrsatzes sind die Einträge der n-ten Zeile des Pascalschen Dreiecks genau die Koeffizienten, die wir erhalten, wenn wir $(x+y)^n$ ausschreiben. Z.B.

$$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3.$$

Aufgaben

Aufgabe 7.17
Es sei K ein Körper und $x \in K$. Zeigen Sie, $x^2 = 1$ genau dann, wenn $x \in \{1, -1\}$.

Aufgabe 7.18

a. Auf der Menge $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir eine zweistellige Operation

$$+ : G \times G \longrightarrow G : \big((x,y),(u,v)\big) \mapsto (x+u, y+v).$$

Zeigen Sie, $(G, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(0, 0)$.

b. Auf der Menge $H := (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\setminus\{(0,0)\}$ definieren wir eine zweistellige Operation

$$\cdot : H \times H \longrightarrow H : \big((x,y),(u,v)\big) \mapsto (xu - yv, xv + yu).$$

Zeige, $(H,\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $(1,0)$.

c. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}\times\mathbb{R},+,\cdot)$ ein Körper ist, wenn die Operationen "+" und "·" wie in a. und b. definiert sind.

Aufgabe 7.19
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot\binom{n}{k} = 2^{n-1}\cdot(n+2)$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 7.20 (Die projektive Gerade als Gruppe)
Wir haben in Aufgabe 6.15 die Projektive Gerade $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ als Menge von Äquivalenzklassen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eingeführt.

Zeigen Sie, dass die zweistellige Operation

$$(v_1 : v_2)\cdot(w_1 : w_2) := (v_1\cdot w_1 - v_2\cdot w_2 : v_1\cdot w_2 + v_2\cdot w_1).$$

wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Äquivalenzklasse abhängt, und dass $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ mit dieser Operation eine Gruppe ist.

§ 8 Ordnungsrelationen

A) Ordnungsrelationen

Definition 8.1 (Ordnungsrelation)
Es sei M eine Menge. Eine *Ordnungsrelation* auf M, auch *Halbordnung* oder *partielle Ordnung* genannt, ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, so dass für alle $x, y, z \in M$ gilt:

O1: $(x, x) \in R$, ("Reflexivität")
O2: $(x, y), (y, x) \in R \implies x = y$, ("Antisymmetrie")
O3: $(x, y), (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$. ("Transitivität")

Beispiel 8.2
Es sei $M = \mathbb{N}$.

a. Die übliche Größerrelation

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x \leq y\}$$

ist eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}_0$.

b. Die Relation

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid x \text{ teilt } y\}$$

ist eine weitere Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}_0$ (siehe Aufgabe 8.21).

Notation 8.3 (Schreibweise $\leq$ für Ordnungsrelationen)
Es sei M eine Menge und R eine Ordnungsrelation auf M. Wir definieren für $x, y \in M$

$$x \leq y \;:\Leftrightarrow\; (x, y) \in R,$$

und sprechen in aller Regel von der Ordnungsrelation "$\leq$" statt R, sofern keine Missverständnisse zu befürchten sind. Ferner sprechen wir von der *partiell* oder *teilgeordneten Menge* $(M, \leq)$.

Mit dieser Schreibweise lassen sich die drei Axiome in Definition 8.1 wie folgt formulieren. Für $x, y, z \in M$ soll gelten:

O1: $x \leq x$, ("Reflexivität")
O2: $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$, ("Antisymmetrie")
O3: $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$. ("Transitivität")

Gilt für $x, y \in M$, dass $x \leq y$ und $x \neq y$, so schreiben wir auch $x < y$.

Beispiel 8.4
Ist M eine Menge, so ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M durch

$$A \leq B \;:\Longleftrightarrow\; A \subseteq B, \text{ für } A, B \in \mathcal{P}(M),$$

partiell geordnet, aber im allgemeinen sind zwei Elemente von $\mathcal{P}(M)$ nicht unbedingt vergleichbar bezüglich dieser Ordnungsrelation. Z. B. sind im Fall $M = \mathbb{N}$ die Elemente $\{2\}$ und $\{3\}$ in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht vergleichbar.

Allgemeiner gilt, ist N eine Menge, deren Elemente wieder Mengen sind, so wird N mit der analogen Definition von "$\leq$" eine partiell geordnete Menge.

Definition 8.5 (Total- und Wohlordnungen)
Es sei M ein Menge.

a. Eine Ordnungsrelation "$\leq$" auf M heißt *Totalordnung* oder *lineare Ordnung*, falls je zwei Elemente aus M vergleichbar sind, d. h. für je zwei Elemente $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$.
b. Ist "$\leq$" eine Ordnungsrelation auf M, $A \subseteq M$ und $x \in A$, so heißt x *minimal* (bzw. *maximal*) in A, falls für alle $y \in A$ mit $y \leq x$ (bzw. $x \leq y$) gilt $x = y$.
c. Eine Totalordnung heißt *Wohlordnung*, falls jede nicht-leere Teilmenge von M ein minimales Element besitzt.

Bemerkung 8.6 (Minimum und Maximum)
Das Minimum bzw. Maximum einer Menge M bezüglich einer Totalordnung ist offenbar eindeutig bestimmt, sofern es existiert. Wir bezeichnen es mit $\min(M)$ bzw. mit $\max(M)$.

Beispiel 8.7

a. Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, \leq)$ mit der üblichen Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ sind total geordnet, aber nicht wohlgeordnet.
b. Gleiches trifft auf $(\mathbb{Z}, \leq)$ mit der üblichen Kleiner-Gleich-Relation

$$\ldots - 2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots$$

zu. Allerdings definiert die "unübliche" Anordnung

$$0 < -1 < 1 < -2 < 2 < -3 < 3 < \ldots$$

in der Tat eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$.

Bemerkung 8.8 (Archimedisches Prinzip)
Die natürlichen Zahlen sind bezüglich der üblichen Ordnungsrelation "$\leq$" wohlgeordnet, d.h.:

Jede nicht-leere Menge natürlicher Zahlen enthält eine kleinste Zahl.

Diese wohlbekannte Eigenschaft der natürlichen Zahlen nennen wir auch das *archimedische Prinzip.*

Definition 8.9 (Charakteristik eine Körpers)
Es sei K ein Körper. Gibt es eine positive ganze Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot 1_K = 0_K$, so definieren wir

$$\operatorname{char}(K) := \min\{m > 0 \mid m \cdot 1_K = 0_K\} \in \mathbb{N},$$

sonst setzen wir $\operatorname{char}(K) := 0$. Die Zahl $\operatorname{char}(K)$ heißt die *Charakteristik* von K.

Proposition 8.10 (Die Charakteristik eines Körpers ist eine Primzahl oder Null.)
Ist K *ein Körper mit* $\operatorname{char}(K) \neq 0$*, so ist* $\operatorname{char}(K)$ *eine Primzahl.*

Beweis: Angenommen, $n := \operatorname{char}(K)$ sei keine Primzahl. Dann gibt es zwei Zahlen $1 < a, b < n$ mit $n = a \cdot b$. Setzen wir $x = a \cdot 1_K$ und $y = b \cdot 1_K$, so gilt

$$x \cdot y = (a \cdot 1_K) \cdot (b \cdot 1_K) = (a \cdot b) \cdot 1_K = n \cdot 1_K = 0.$$

Aus Lemma 7.8 folgt dann aber $a \cdot 1_K = x = 0$ oder $b \cdot 1_K = y = 0$, im Widerspruch zur Minimalität von $n = \operatorname{char}(K)$. Also muss n eine Primzahl sein. □

Beispiel 8.11
Ist p eine Primzahl, so hat der Körper $\mathbb{F}_p$ aus Beispiel 7.6 die Charakterisitik $\operatorname{char}(\mathbb{F}_p) = p$. Die Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben Charakteristik null.

Definition 8.12 (Supremum und Infimum)
Es sei "$\leq$" eine Totalordnung auf einer Menge M und $\emptyset \neq A \subseteq M$ eine nicht-leere Teilmenge von M.

a. Wir nennen $s \in M$ eine *obere Schranke* von A, falls $s \geq x$ für alle $x \in A$.
b. Wir nennen A *nach oben beschränkt*, falls A eine obere Schranke besitzt.
c. Wir nennen $s \in M$ das *Supremum* von A, falls s das Minimum der Menge der oberen Schranken von A ist. Dieses Minimum ist eindeutig bestimmt, wenn es existiert, und wir bezeichnen es dann mit $\sup(A)$.
d. Wir nennen $s \in M$ eine *untere Schranke* von A, falls $s \leq x$ für alle $x \in A$.
e. Wir nennen A *nach unten beschränkt*, falls A eine untere Schranke besitzt.
f. Wir nennen $s \in M$ das *Infimum* von A, falls s das Maximum der Menge aller unteren Schranken von A ist. Dieses Maximum ist eindeutig bestimmt, wenn es existiert, und wir bezeichnen es dann mit $\inf(A)$.
g. Wir nennen A *beschränkt*, wenn A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel 8.13
a. Besitzt eine Teilmenge A einer totalgeordneten Menge M ein Maximum, so ist dieses offenbar auch das Supremum von A. Analog ist das Minimum einer Menge A auch ihr Infimum.
b. Betrachten wir die reellen Zahlen mit ihrer üblichen Ordnung und die Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$, so ist $1 = \sup(A) = \max(A)$ das Supremum von A, das zugleich ein Maximum ist, und $0 = \inf(A)$ ist ein Infimum von A, das kein Minimum ist.
c. Betrachten wir die rationalen Zahlen mit ihrer üblichen Ordnungsrelation, so ist
$$\{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \text{ und } x^2 \leq 2\}$$
nach oben beschränkt, besitzt aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

Bemerkung 8.14 (Supremumsaxiom)
Die reellen Zahlen sind bezüglich ihrer üblichen Ordnungsrelation nicht wohlgeordnet, d.h. nicht jede nicht-leere Teilmenge besitzt ein kleinstes Element. Selbst, wenn wir voraussetzen, dass die Teilmenge nach unten beschränkt ist, muss sie kein kleinstes Element besitzen, d.h. kein Minimum enthalten, wie wir in Beispiel 8.13 gesehen haben. Es gilt aber, dass zu jeder nicht-leeren, nach unten beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Infimum in $\mathbb{R}$ existiert. Äquivalent dazu ist die duale Aussage für das Supremum:

> Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Diese Eigenschaft ist als *Supremumsaxiom* der reellen Zahlen bekannt. Auch wenn sich die Korrektheit der Aussage nicht unmittelbar aus unserer Alltagserfahrung mit den reellen Zahlen als Dezimalzahlen erschließt, wollen wir sie ohne weiteren Beweis als gegeben voraussetzen.

B) Angeordnete Körper

Definition 8.15 (Angeordnete Körper)
Es sei K ein Körper und "$\leq$" eine Totalordnung auf K. Wir nennen das Quadrupel $(K, +, \cdot, \leq)$ einen *angeordneten Körper*, wenn die Totalordnung mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist, d.h. wenn für alle $x, y, z \in K$

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x + z < y + z$$

und

$$x < y, \;\; 0 < z \quad \Longrightarrow \quad x \cdot z < y \cdot z$$

gilt. Ist $x \in K$ und $x > 0$, so nennen wir x *positiv*, ist $x < 0$, so nennen wir x *negativ*.

Beispiel 8.16

a. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnungsrelation sind Beispiele für angeordnete Körper. $\mathbb{Q}$ erfüllt das Supremumsaxiom nicht (siehe Beispiel 8.13), $\mathbb{R}$ erfüllt es.

b. Es gibt keine Totalordnung auf $\mathbb{F}_2$, durch die $\mathbb{F}_2$ ein angeordneter Körper würde. Denn würde es eine solche Totalordnung "$\leq$" geben, so wäre entweder $0 < 1$, was zum Widerspruch $1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 0$ führt, oder es wäre $1 < 0$, was zum Widerspruch $0 = 1 + 1 < 0 + 1 = 1$ führt.

Lemma 8.17 (Rechenregeln in angeordneten Körpern)
Es sei $(K, +, \cdot, \leq)$ *ein angeordneter Körper und* $x, y, u, v \in K$.

a. $x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -x < 0.$

b. *Ist* $x \neq 0$, *so ist* $x^2 > 0$.

c. $1 > 0$.

d. *Ist* $0 < x < y$*, so ist* $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$*.*

e. *Ist* $x < y$ *und* $u < v$*, so ist* $x + u < y + v$*.*

f. *Ist* $0 < x$ *und* $n \in \mathbb{N}$*, so ist* $0 < x^n$*.*

g. *Ist* $0 \leq x, y$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 1$*, so gilt*

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad x^n < y^n.$$

Beweis:

a. Aus $0 < x$ folgt durch Addition von $-x$

$$-x = 0 + (-x) < x + (-x) = 0.$$

Umgekehrt folgt aus $-x < 0$ durch Addition von x

$$0 = -x + x < 0 + x = x.$$

b. Ist $x > 0$, so folgt unmittelbar

$$0 = 0 \cdot x < x \cdot x = x^2.$$

Ist $x < 0$, so ist $0 < -x$ und es gilt

$$0 = 0 \cdot (-x) < (-x) \cdot (-x) = x \cdot x = x^2.$$

c. $1 = 1^2 > 0$.

d. Nach Voraussetzung ist $y > 0$. Nehmen wir an, $\frac{1}{y} < 0$, so folgt

$$1 = \frac{1}{y} \cdot y < 0 \cdot y = 0$$

im Widerspruch zu Teil c., also ist $0 < \frac{1}{y}$. Entsprechend gilt $0 < \frac{1}{x}$, so dass auch

$$0 = 0 \cdot \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$$

und somit wegen $x < y$ auch

$$\frac{1}{y} = x \cdot \frac{1}{xy} < y \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{x}.$$

e. Wir wenden die Verträglichkeit der Totalordnung mit der Addition mehrfach an:

$$x + u < y + u < y + v.$$

f./g. Den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

□

Proposition 8.18 (Charakterisierung des Supremums und Infimums)
Ist $(K, +, \cdot, \leq)$ *ein angeordneter Körper,* $A \subseteq K$ *und* $s \in K$*, dann gelten*

$$s = \sup(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} 1) & \forall\, x \in A \;:\; x \leq s \text{ und} \\ 2) & \forall\, 0 < \varepsilon \in K \;:\; \exists\, x \in A \;:\; s - \varepsilon < x \end{array}$$

sowie

$$s = \inf(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} 1) \ \ \forall\, x \in A\ :\ x \geq s \textit{ und} \\ 2) \ \ \forall\, 0 < \varepsilon \in K\ :\ \exists\, x \in A\ :\ s + \varepsilon > x. \end{array}$$

Beweis: Ist $s = \sup(A)$, so ist s ein obere Schranke von A und somit gilt Bedingung 1). Sei also $0 < \varepsilon \in K$, so ist $s - \varepsilon < s$ und mithin ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von A. Also gibt es ein $x \in A$ mit $x > s - \varepsilon$ und Bedingung 2) ist erfüllt.

Nehmen wir nun umgekehrt an, daß die Bedingungen 1) und 2) gelten. Wegen 1) ist s dann eine obere Schranke von A, und wir müssen nur noch zeigen, dass es keine kleinere obere Schranke geben kann. Dazu betrachten wir eine beliebige kleinere Zahl $t \in K$ mit $t < s$. Für $\varepsilon := s - t \in K$ gilt $\varepsilon > 0$ und wegen 2) gibt es dann ein $x \in A$ mit $x > s - \varepsilon = t$. Also ist t keine obere Schranke von A.

Die Aussage für das Infimum zeigt man analog. □

Das folgende Lemma ist interessant bei der Definition des Riemann-Integrals einer Funktion.

Lemma 8.19
Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *zwei nicht-leere Teilmengen von* $\mathbb{R}$ *mit* $a \leq b$ *für alle* $a \in A$, $b \in B$. *Dann gilt*

$$\sup(A) \leq \inf(B).$$

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt unmittelbar, daß A nach oben und B nach unten beschränkt ist, so dass $\sup(A) \in \mathbb{R}$ und $\inf(B) \in \mathbb{R}$ existieren.

Angenommen, $\sup(A) > \inf(B)$, so ist $\varepsilon := \frac{\sup(A)-\inf(B)}{2} > 0$. Somit ist $\sup(A) - \varepsilon$ keine obere Schranke von A und $\inf(B) + \varepsilon$ keine untere Schranke von B. Es gibt also ein $a \in A$ und ein $b \in B$ mit

$$a > \sup(A) - \varepsilon = \frac{\sup(A) + \inf(B)}{2} = \inf(B) + \varepsilon > b,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. □

Aufgaben

Aufgabe 8.20
Ist M eine endliche Menge, so gilt

$$|M| = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, f : M \longrightarrow \{1, \ldots, n\} \text{ injektiv}\},$$

und jede injektive Abbildung $f : M \longrightarrow \{1, \ldots, |M|\}$ ist bijektiv.

Aufgabe 8.21
Zeigen Sie, dass durch

$$R := \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \text{ teilt } y\}$$

eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$ definiert wird. Ist R eine Totalordnung?

Aufgabe 8.22

Definiere auf $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine Relation durch

$$(m,n) \leq (k,l) \iff \begin{array}{l} 1.\ \max\{m,n\} < \max\{k,l\} \text{ oder} \\ 2.\ (\max\{m,n\} = \max\{k,l\} \text{ und } m < k) \text{ oder} \\ 3.\ (\max\{m,n\} = \max\{k,l\} \text{ und } m = k \text{ und } n > l) \text{ oder} \\ 4.\ (m,n) = (k,l). \end{array}$$

Zeigen Sie, dass "$\leq$" eine Totalordnung auf M definiert. Stelle graphisch in der Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ dar, wie die Elemente (m,n) in M mit $\max\{m,n\} \leq 4$ angeordnet sind.

Aufgabe 8.23

Sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subseteq K$ Teilmengen, so dass $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie, dass auch $\sup(A+B)$ existiert und $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ gilt.

Aufgabe 8.24

Bestimme Supremum, Infimum, Maximum und Minimum (sofern sie existieren) der Mengen:

$$A = \left\{ \frac{m+n}{m \cdot n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

und

$$B = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

§ 9 Eigenschaften der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Theorem 9.1 (Charakterisierung der reellen Zahlen)
Der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit der üblichen Ordnungsrelation ist der einzige angeordnete Körper, in dem jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Bemerkung 9.2
Die Aussage in Theorem 9.1 besagt zweierlei. Zum einen wird festgestellt, dass $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist und dem Supremumsaxiom genügt. Zum anderen wird festgestellt, dass dies für keinen *anderen* angeordneten Körper gilt. Das soll heißen, wenn es einen anderen angeordneten Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ mit diesen Eigenschaften gibt, dann gibt es eine *bijektive* Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow K,$$

so dass $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ und

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. In dem Fall kann man die beiden Körper nicht mehr unterscheiden. Man sagt deshalb auch, daß die reellen Zahlen durch die Eigenschaften in Theorem 9.1 charakterisiert sind, und man könnte die reellen Zahlen axiomatisch durch Angabe der Eigenschaften einführen.

Wir wollen Theorem 9.1 in dieser Vorlesung *nicht* beweisen. Stattdessen werden wir von den reellen Zahlen von nun an nur noch die im Satz angegebenen Eigenschaften wirklich verwenden. Wenn wir uns also $\mathbb{R}$ als einen beliebigen angeordneten Körper mit Supremumsaxiom denken, dann wird alles, was wir von nun an beweisen, dort genauso gelten. Wir müssten die reellen Zahlen also noch gar nicht kennen, um die weitere Theorie betreiben zu können. Die wenigen oben gegebenen Axiome reichen uns aus. Insofern befinden wir uns von jetzt an auf wesentlich sichererem Grund und müssen nicht mehr immer wieder Bezug auf unser Vorwissen zu den Zahlsystemen nehmen.

Satz 9.3 ($\mathbb{R}$ ist archimedisch angeordnet.)
Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $y < n \cdot x$.

Beweis: Wir betrachten die nicht-leere Teilmenge

$$A := \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\} \subsetneqq \mathbb{R}$$

der reellen Zahlen und müssen zeigen, dass y keine obere Schranke dieser Menge ist.

Nehmen wir an, dies wäre doch der Fall, dann ist A nach oben beschränkt und somit existiert das Supremum

$$s := \sup(A).$$

Da $x > 0$ ist, ist $s - x < s$ und somit ist $s - x$ keine obere Schranke von A, d.h. es gibt eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$s - x < n \cdot x.$$

Dann ist aber auch

$$s = (s - x) + x < n \cdot x + x = (n + 1) \cdot x,$$

im Widerspruch dazu, dass s eine obere Schranke von A ist.

Damit haben wir gezeigt, dass A keine obere Schranke besitzt und insbesondere, dass y keine solche ist, d.h. es gibt eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $y < n \cdot x$. □

Korollar 9.4 (Konsequenzen der archimedischen Anordnung)

a. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine ganze Zahl n, so dass $n \leq x < n + 1$.*

b. *Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, so dass $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis:

a. Ist $0 \leq x < 1$, so ist $n = 0$. Ist $1 \leq x$, so gibt es nach Satz 9.3 eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $x < m \cdot 1 = m$. Nach dem Archimedischen Prinzip 8.8 besitzt dann die nicht-leere Menge

$$M := \{k \in \mathbb{N} \mid x < k\}$$

ein Minimum $m_0 = \min(M)$, und für $n := m_0 - 1 < m_0$ gilt mithin

$$n \leq x < m_0 = n + 1.$$

Ist $x < 0$, so ist $-x > 0$ und wir haben schon gezeigt, dass es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq -x < m + 1$ gibt. Dann ist aber

$$-m - 1 < x \leq -m.$$

Falls $x = -m$, so setzen wir $n := -m$, und sonst setzen wir $n := -m - 1$.

b. Wegen $\varepsilon > 0$ ist nach Lemma 8.17 auch $\frac{1}{\varepsilon} > 0$, und nach a. gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$0 < \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Mit Lemma 8.17 folgt dann

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

□

Definition 9.5 (Intervalle)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir nennen eine Menge der Form

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

ein *abgeschlossenes Intervall*, eine Menge der Form

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

ein *offenes Intervall* und Mengen der Form

$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$$

bzw.

$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$$

halboffene Intervalle. Mengen der Form

$$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\},$$

$$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$

$$(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\},$$

$$(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

$$(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$$

heißen *uneigentliche Intervalle*.

Satz 9.6 ($\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$.)
Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so gibt es eine rationale Zahl im Intervall (a,b).

Beweis: Wegen $b - a > 0$ gibt es nach Korollar 9.4 eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < \frac{1}{n} < b - a. \tag{7}$$

Zudem gibt es nach Korollar 9.4 eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$m \le n \cdot a < m + 1. \tag{8}$$

Damit gilt dann

$$a \overset{(8)}{<} \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \overset{(8)}{\le} a + \frac{1}{n} \overset{(7)}{<} b$$

und $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$ ist eine rationale Zahl. □

Satz 9.7 (Bernoullische Ungleichung)
Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \ge -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$(1+x)^n \ge 1 + n \cdot x.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: $n = 0$: $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x$.

Induktionsschluss: $n \mapsto n+1$: Nach Lemma 8.17 b. ist $x^2 \ge 0$ und nach Voraussetzung gilt zudem $1 + x \ge 0$. Damit erhalten wir dann:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{\text{Ind}}{\ge}$$

$$(1 + n \cdot x) \cdot (1+x) = 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2 \overset{8.17b.}{\ge} 1 + (n+1) \cdot x.$$

Die Aussage ist damit also mittels Induktion gezeigt. □

Satz 9.8 (Existenz von n-ten Wurzeln in $\mathbb{R}$)
Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gibt es genau eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$ und $a^n = x$.
Wir nennen diese Zahl die n-te Wurzel *aus x und bezeichnen sie mit $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{\frac{1}{n}}$.*

Beweis: Wir wollen uns zunächst der Eindeutigkeit der Lösung zuwenden, sofern sie existiert. Nehmen wir also an, es würde zwei verschiedene nicht-negative reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^n = b^n = x$ geben. Dann ist eine der beiden echt kleiner als die andere und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass dies a ist, d.h. $0 \leq a < b$. Aus Lemma 8.17 g. folgt dann $x = a^n < b^n = x$, was ein offensichtlicher Widerspruch ist. Mithin haben wir gezeigt, dass es höchstens eine nicht-negative Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a^n = x$ geben kann.

Es bleibt noch zu zeigen, dass es auch wirklich eine solche nicht-negative Zahl a gibt. Ist $x = 0$, so ist $a = 0$ eine Lösung für $a^n = 0$. Wir können im weiteren Verlauf des Beweises also voraussetzen, dass $x > 0$.

Wir betrachten dann die Teilmenge

$$A := \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0, y^n \leq x\}$$

der reellen Zahlen, und wir behaupten, dass $1+x$ eine obere Schranke für A ist. Dazu betrachten wir eine reelle Zahl $y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1 + x > 0$. Aus der Bernoullischen Ungleichung folgt dann

$$y^n \overset{8.17g.}{\geq} (1+x)^n \overset{9.7}{\geq} 1 + n \cdot x > x,$$

und somit ist $y \notin A$. Also ist A nach oben beschränkt durch $x + 1$. Wegen $0 \in A$ ist A zudem nicht-leer und deshalb existiert das Supremum

$$a := \sup(A) \geq 0.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $a^n = x$ gilt.

Zeige: $a^n \geq x$: Nehmen wir an, es gelte $a^n < x$.
Idee: *Finde eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so dass $a + \varepsilon \in A$. – $\lightning$*
Wegen $a \geq 0$ ist

$$c := \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \geq \binom{n}{n} = 1 > 0$$

und somit auch $\frac{1}{c} > 0$ nach Lemma 8.17. Aus unserer Annahme folgt dann

$$\frac{x - a^n}{c} > 0.$$

Somit ist auch

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{x - a^n}{c},\ 1\right\} > 0$$

und es folgt

$$a^n + c \cdot \varepsilon \leq x. \tag{9}$$

Wegen $0 < \varepsilon \leq 1$ ist $\varepsilon^k \leq \varepsilon$ für alle $k \geq 1$, und aus dem Binomischen Lehrsatz 7.15 folgt dann

$$\begin{aligned}(a+\varepsilon)^n =& a^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \varepsilon^k \\ \leq& a^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot \varepsilon \;=\; a^n + c \cdot \varepsilon \overset{(9)}{\leq} x.\end{aligned}$$

Somit ist $a+\varepsilon \in A$ und $a+\varepsilon > a$ im Widerspruch dazu, dass a das Supremum von A ist. Mithin muss $a^n \geq x$ sein.

Zeige: $a^n \leq x$**:** Nehmen wir an, es gelte $a^n > x$.

Idee: *Finde ein* $\varepsilon > 0$ *und ein* $y \in A$*, so dass* $y^n > (a-\varepsilon)^n \geq x$. – $\lightning$

Wegen $a^n > x$ ist $a > 0$ und dann ist auch die Zahl

$$\frac{a \cdot (a^n - x)}{n \cdot a^n} > 0$$

positiv. Wir setzen nun

$$\varepsilon := \min \left\{ \frac{a \cdot (a^n - x)}{n \cdot a^n} \;,\; a \right\} > 0.$$

Aus der Definition von ε folgt zum einen

$$-\frac{\varepsilon}{a} \geq -1 \tag{10}$$

und zum anderen unter Anwendung der Bernoullischen Ungleichung

$$x \leq a^n \cdot \left(1 + n \cdot \frac{-\varepsilon}{a}\right) \overset{9.7}{\leq} a^n \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{a}\right)^n = (a-\varepsilon)^n; \tag{11}$$

dabei beachten wir die Bernoullische Ungleichung wegen (10) anwenden können.

Da a das Supremum von A ist und $a - \varepsilon < a$ ist, muss es eine Zahl $y \in A$ geben mit

$$y > a - \varepsilon > 0.$$

Dann gilt nach Lemma 8.17 auch

$$y^n > (a-\varepsilon)^n \overset{(11)}{\geq} x,$$

im Widerspruch dazu, daß $y \in A$. Also muss auch $a^n \leq x$ gelten.

Da sowohl $a^n \geq x$, als auch $a^n \leq x$ gilt, folgt aus der Antisymmetrie der Ordnungsrelation, dass $a^n = x$, und wir haben die n-te Wurzel von x gefunden. $\square$

Bemerkung 9.9

In $\mathbb{R}$ besitzt also insbesondere jede nicht-negative Zahl eine Quadratwurzel. Dies gilt in den rationalen Zahlen nicht (siehe Satz 9.10), und man kann die reellen Zahlen als eine Erweiterung des Zahlbereichs der rationalen Zahlen ansehen, die unter anderem deshalb notwendig war. Negative Zahlen besitzen aber auch in $\mathbb{R}$ noch keine Quadratwurzeln, und wir werden im folgenden Kapitel deshalb unseren Zahlbereich noch einmal erweitern zu den sogenannten komplexen Zahlen, die dieses Manko dann beheben.

Satz 9.10 ($\sqrt{2}$ ist irrational.)
Es gibt keine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ *mit* $a^2 = 2$.

Beweis: Nehmen wir an, es wäre $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine solche Zahl. Wir können ohne weiteres annehmen, dass der Bruch in gekürzter Form vorliegt. Aus

$$\frac{p^2}{q^2} = a^2 = 2$$

folgt dann

$$p^2 = q^2 \cdot 2.$$

Also ist p^2 eine gerade Zahl, und dann muss notwendigerweise auch p eine gerade Zahl sein. D.h. es gibt ein $b \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2 \cdot b$. Also ist

$$4 \cdot b^2 = p^2 = 2 \cdot q^2,$$

und somit

$$2 \cdot b^2 = q^2.$$

Mit dem gleichen Argument sind dann auch q^2 und q gerade Zahlen, und somit ist q von der Form $q = 2 \cdot c$. Aber das widerspricht der Voraussetzung, dass der Bruch $\frac{p}{q}$ in gekürzter Form vorgelegen hat. □

Aufgaben

Aufgabe 9.11
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

für alle $n \geq 2$ gilt.

Aufgabe 9.12
Zeigen Sie, für je drei reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|a-c|}{1+|a-c|} \leq \frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}$$

§ 10 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir kommen jetzt zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, dem neben $\mathbb{R}$ wichtigsten Körper. Warum reichen eigentlich die reellen Zahlen nicht aus, wozu braucht man die komplexen Zahlen? Ja, man kann sogar fragen, warum wir überhaupt die reellen Zahlen benötigen, wenn wir doch ohnehin nur mit endlichen Dezimalbrüchen, also rationalen Zahlen, rechnen können? Die Antwort auf die zweite Frage ist schnell gegeben. Wir wissen alle, daß etwa ganz natürlich auftretende Größen wie die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit Seitenlänge eins, sprich die Zahl $\sqrt{2}$, oder das Verhältnis von Umfang zum Durchmesser eines Kreises, sprich die Kreiszahl π, keine rationalen Zahlen sind. Sie sind aber reelle Zahlen und die reellen Zahlen sind in gewissem Sinne, eine Vervollständigung der rationalen Zahlen. Wir brauchen also die reellen Zahlen, da die rationalen Zahlen Lücken aufweisen. Die komplexen Zahlen werden nun deshalb eingeführt, um einen Mangel, den die reellen Zahlen immer noch haben, zu beheben. Hierbei geht es um das Lösen von Gleichungen, aber nicht mehr linearen, sondern quadratischen. Es ist bekannt, daß das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist. Also kann es keine reelle Zahl x geben, die die Gleichung $x^2 = -1$ löst.

Als Lösung genau dieser Gleichung wird nun eine neue Größe eingeführt, die *imaginäre Einheit* i. Definitionsgemäß ist sie diejenige Zahl, für die $i^2 = -1$ gilt. Wenn man nun eine solche Größe i einführt, dann ist damit alleine gar nichts gewonnen. Man will ja mit i auch rechnen können, und zwar will man möglichst alle Rechenregeln von $\mathbb{R}$ übertragen. Man will nicht nur $i^2 = i \cdot i$, sondern auch $i+i$ oder Ausdrücke wie $37+42i$ bilden können. Dabei sollen die so zu konstruierenden *komplexen Zahlen* die reellen Zahlen als Teilmenge enthalten.

Daß es wirklich ein solches Zahlsystem komplexer Zahlen, in unserer Sprache den Körper der komplexen Zahlen, gibt, ist überhaupt nicht klar und wurde historisch erst spät realisiert und auch akzeptiert.[2] Gauß hat die Zahlen geometrisch, als Punkte in der Ebene, eingeführt, weshalb die komplexen Zahlen heute noch *Gaußsche Zahlenebene* heißen. Wir führen die komplexen Zahlen ebenfalls als reelle Zahlenpaare ein, definieren die Addition und die Multiplikation aber algebraisch und werden die Definitionen erst im Anschluß daran geometrisch interpretieren.

Bemerkung 10.1 (Konstruktion der komplexen Zahlen)
Es ist unser erklärtes Ziel, auf der reellen Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ mit der Vektoraddtion

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

eine *Multiplikation* zu definieren, so daß einerseits die üblichen Rechenregeln (Assoziativgesetze, Kommutativgesetze und Distributivgesetze) gelten und daß außerdem

[2] Erstmals tauchte $\sqrt{-1}$ wohl um 1540 bei Cardano auf. Wirklich als Zahlsystem wurden die komplexen Zahlen aber erst durch Gauß, 1777-1855, etabliert. Hierzu und zu vielen weiteren interessanten Tatsachen um die komplexen Zahlen vgl. [**Ebb92**] § 3.

der Vektor

$$i := (0, 1)$$

eine Lösung der Gleichung

$$z^2 = -1$$

ist. Um letzteres richtig zu interpretieren, denken wir uns die reelle Zahlengerade $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, indem wir sie mit der x-Achse identifizieren, d.h.

$$\mathbb{R} \triangleq \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\} = x\text{-Achse}.$$

Die Multiplikation soll also der Bedingung

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \triangleq -1$$

genügen. Außerdem würden wir uns sicher wünschen, daß die Multiplikation eines Vektors mit der reellen Zahl

$$a \triangleq (a, 0)$$

wie die Streckung des Vektors um den Faktor a funktioniert, d.h.

$$(a, 0) \cdot (x, y) \triangleq a \cdot (x, y) = (ax, ay).$$

Wenn eine Multiplikation diese Wunschliste erfüllt, so gilt offenbar:

$$\begin{aligned}
(x, y) \cdot (u, v) &= \big((x, 0) + (0, y)\big) \cdot \big((u, 0) + (0, v)\big) \\
&= \big((x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)\big) \cdot \big((u, 0) + (v, 0) \cdot (0, 1)\big) \\
&= (x, 0) \cdot (u, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \cdot (u, 0) + (x, 0) \cdot (v, 0) \cdot (0, 1) \\
&\qquad\qquad + (y, 0) \cdot (0, 1) \cdot (v, 0) \cdot (0, 1) \\
&= (xu, 0) + (yu, 0) \cdot (0, 1) + (xv, 0) \cdot (0, 1) + (yv, 0) \cdot (0, 1) \cdot (0, 1) \\
&= (xu, 0) + (yu, 0) \cdot (0, 1) + (xv, 0) \cdot (0, 1) + (yv, 0) \cdot (-1, 0) \\
&= (xu, 0) + (0, yu) + (0, xv) + (-yv, 0) \\
&= (xu - yv, xv + yu).
\end{aligned}$$

Wir haben für die Definition der Multiplikation also nur *eine einzige* Möglichkeit, und die funktioniert zum Glück auch.

Satz 10.2 (Der Körper der komplexen Zahlen)
Die Menge $\mathbb{C} := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *zusammen mit der durch*

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v), \quad \textit{für } (x, y), (u, v) \in \mathbb{C},$$

und

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu), \quad \textit{für } (x, y), (u, v) \in \mathbb{C},$$

definierten Addition und Multiplikation ist ein Körper, den wir den Körper der komplexen Zahlen *nennen. .*

Beweis: Dies folgt aus Aufgabe 7.18. □

Bemerkung 10.3

a. Daß $\mathbb{C}$ mit den beiden Operationen ein *Körper* ist, bedeutet, daß die oben erwähnten üblichen Rechenregeln bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gelten, so wie wir sie von den reellen Zahlen her kennen. Man beachte dabei, daß die reelle Zahl $0 \hat{=} (0,0)$ bei der Addtion nichts tut und die reelle Zahl $1 \hat{=} (1,0)$ bei der Multiplikation ohne Wirkung ist:

$$(x,y) + (0,0) = (x+0, y+0) = (x,y)$$

und

$$(x,y) \cdot (1,0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x,y).$$

Das multiplikative Inverse der Zahl $(0,0) \neq (x,y) \in \mathbb{C}$ ist

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right).$$

b. Die Abbildung

$$\iota : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : x \mapsto (x,0)$$

ist mit der Addition und der Multiplikation verträglich und identifiziert den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit dem Teilkörper $\mathbb{R} \times \{0\}$ von $\mathbb{C}$. Wir fassen $\mathbb{R}$ in diesem Sinne als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf.

c. Praktischer als das Rechnen mit Paaren von Zahlen ist die folgende Notation für komplexe Zahlen. Wir setzen $x := (x,0)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $i := (0,1)$. Dann gilt für $z = (x,y) \in \mathbb{C}$

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) \hat{=} x + iy.$$

Diese Schreibweise wollen wir künftig für komplexe Zahlen verwenden. Damit gilt dann:

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = -1.$$

Ferner ergibt sich die etwas willkürlich anmutende Definition der Multiplikation ganz "natürlich" aus

$$(x+iy)(u+iv) = \left(xu + i^2 yv\right) + i(xv + yu) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Lemma 10.4 ($\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet.)

Es gibt keine Totalordnung "$\leq$" auf $\mathbb{C}$, die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht.

Beweis: Angenommen, es gäbe eine Totalordnung "$\leq$", die $\mathbb{C}$ zu einem angeordneten Körper macht. Nach Lemma 8.17 muß dann $0 < i^2 = -1$ gelten, was im Widerspruch zu $0 < 1$ steht. □

Definition 10.5 (Der Betrag und die komplexe Konjugation)

a. Wir definieren die *Betragsfunktion* auf $\mathbb{C}$ durch

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x + iy \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

und nennen $|x|$ auch den *Absolutbetrag* von x. Wegen Satz 9.8 ist der Betrag einer komplexen Zahl definiert und ist stets eine nicht-negative reelle Zahl.

Beachte zudem, für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

b. Wir definieren die *komplexe Konjugation* als

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : z = x + iy \mapsto \overline{z} := x - iy.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $\overline{z}$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*.

c. Wir definieren die Abbildungen *Realteil*

$$\mathrm{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto x$$

und *Imaginärteil*

$$\mathrm{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} : x + iy \mapsto y$$

und nennen $\mathrm{Re}(x + iy) = x$ den *Realteil* von z und $\mathrm{Im}(x + iy) = y$ den *Imaginärteil* von z.

Beispiel 10.6
Wir betrachten die komplexe Zahl

$$z = i - 1 = -1 + i.$$

Dann gilt $\mathrm{Re}(z) = -1$, $\mathrm{Im}(z) = 1$ und

$$\overline{z} = -1 - i = -(1 + i).$$

Für den Betrag von z rechnen wir

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

und damit erhalten wir die Gleichung

$$z \cdot \overline{z} = (-1 + i) \cdot (-1 - i) = 2 = |z|^2.$$

Lemma 10.7 (Einfache Rechenregeln in $\mathbb{C}$)
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.

a. *Der Betrag ist multiplikativ, d.h.*

$$|z| \cdot |w| = |zw|.$$

b. *Der Betrag erfüllt die* Dreiecksungleichung, *d.h.*

$$|z + w| \leq |z| + |w|,$$

und es gilt stets

$$\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|.$$

c. $z = 0 \iff |z| = 0$.

d. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

e. *Wenn $z \neq 0$, dann ist $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

f. *Die komplexe Konjugation ist additiv, d.h.*

$$\overline{z}+\overline{w}=\overline{z+w}.$$

g. *Die komplexe Konjugation ist multiplikativ, d.h.*

$$\overline{z}\cdot\overline{w}=\overline{z\cdot w}.$$

h. $\overline{\overline{z}}=z$.

i. $\overline{z}=z \iff z\in\mathbb{R}$.

j. $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}\leq|z|$.

k. $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}\leq|z|$.

l. $|z|=\left|\overline{z}\right|=|-z|$.

Beweis: Die Aussagen in den Teilen c.-l. überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

a. Seien $z=x+iy$ und $w=u+iv$ mit $x,y,u,v\in\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}|zw|^2 =&|(xu-yv)+i\cdot(xv+yu)|^2=(xu-yv)^2+(xv+yu)^2\\ =&x^2u^2-2xuyv+y^2v^2+x^2v^2+2xvyu+y^2u^2\\ =&x^2u^2+y^2v^2+x^2v^2+y^2u^2=(x^2+y^2)\cdot(u^2+v^2)\\ =&|z|^2\cdot|w|^2=\big(|z|\cdot|w|\big)^2.\end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der nicht-negativen Quadratwurzel (Satz 9.8) folgt dann

$$|zw|=|z|\cdot|w|.$$

b. Wir wollen nun die Dreiecksungleichung unter Verwendung der übrigen Aussagen zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &\overset{\text{d.}}{=} (z+w)\cdot\overline{(z+w)}\\ &\overset{\text{f.}}{=} z\cdot\overline{z}+(z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w)+w\cdot\overline{w}\\ &\overset{\text{d.,g.,h.}}{=}|z|^2+\big(z\cdot\overline{w}+\overline{z\cdot\overline{w}}\big)+|w|^2\\ &\overset{\text{j.}}{=} |z|^2+2\cdot\mathrm{Re}(z\cdot\overline{w})+|w|^2\\ &\overset{\text{j.}}{\leq} |z|^2+2\cdot|z\cdot\overline{w}|+|w|^2\\ &\overset{\text{a.}}{=} |z|^2+2\cdot|z|\cdot|\overline{w}|+|w|^2\\ &\overset{\text{l.}}{=} |z|^2+2\cdot|z|\cdot|w|+|w|^2\\ &= \big(|z|+|w|\big)^2.\end{aligned}$$

Da dies eine Ungleichung von nicht-negativen Zahlen in dem angeordneten Körper $\mathbb{R}$ ist, folgt aus Lemma 8.17, daß

$$|z+w|\leq|z|+|w|.$$

Es bleibt, die zweite Aussage in Teil b. zu zeigen. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|,$$

und somit

$$|z| - |w| \leq |z-w|.$$

Analog folgt

$$-(|z|-|w|) = |w| - |z| \leq |w-z| = |-(w-z)| = |z-w|.$$

Wegen

$$\big||z|-|w|\big| = \begin{cases} |z|-|w|, & \text{falls } |z|-|w| \geq 0, \\ -(|z|-|w|) & \text{falls } |z|-|w| < 0, \end{cases}$$

folgt dann $\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|$.

□

Beispiel 10.8

a. Gegeben seien $z = 3+2i$ und $w = 5-i$. Dann gelten

$$z \cdot w = (3\cdot 5 - 2\cdot(-1)) + (3\cdot(-1) + 2\cdot 5)\cdot i = 17 + 7i$$

sowie

$$|w| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} =& z\cdot\frac{\overline{w}}{|w|^2} = (3+2i)\cdot\left(\frac{5}{26} + \frac{1}{26}\cdot i\right) \\ =& \left(3\cdot\frac{5}{26} - 2\cdot\frac{1}{26}\right) + \left(3\cdot\frac{1}{26} + 2\cdot\frac{5}{26}\right)\cdot i \\ =& \frac{13}{26} + \frac{13}{26}\cdot i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i. \end{aligned}$$

b. Für die komplexen Zahlen $z = 3+4i$ und $w = 5-12i$ gilt

$$z + w = (3+5) + (4-12)\cdot i = 8 - 8i$$

und somit

$$\begin{aligned} |z+w| =& \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{2}\cdot 8 < 16 < 18 = 5 + 13 \\ =& \sqrt{25} + \sqrt{169} = \sqrt{3^2+4^2} + \sqrt{5^2+12^2} = |z| + |w|. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{(3+4i)+(3-4i)}{2} = \frac{6}{2} = 3 = \mathrm{Re}(z).$$

Bemerkung 10.9 (Geometrische Deutung und Polarkoordinaten)
Wir wollen hier einige der bisher eingeführten Operationen auf den komplexen Zahlen und der angeführten Eigenschaften derselben geometrisch interpretieren.

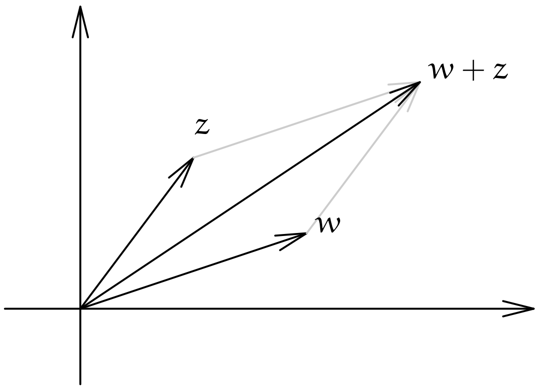


Abbildung 3. Addition in $\mathbb{C}$ als Vektoraddition

- Die Addition ist einfach die komponentenweise Addition, also die Addition der Vektoren (siehe Abbildung 3).
- Die komplexe Konjugation ist die Spiegelung an der x-Achse.
- Der Realteil ist die orthogonale Projektion auf die x-Achse und der Imaginärteil die orthogonale Projektion auf die y-Achse.
- Der Betrag $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist die euklidische Länge des Vektors z, d.h. der Abstand von z zum Ursprung. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Satz von Pythagoras (siehe Abbildung 4).

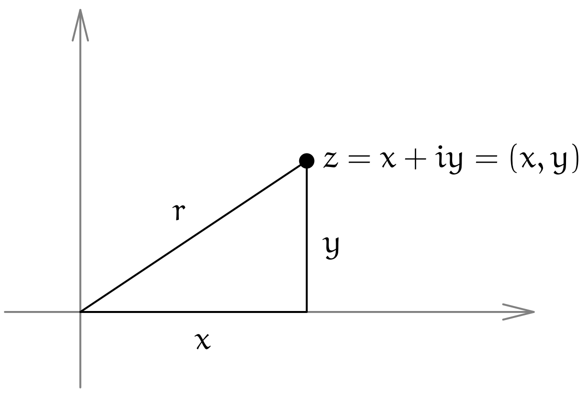


Abbildung 4. Pythagoras: $x^2 + y^2 = r^2$

- Die Dreiecksungleichung besagt deshalb im wesentlichen, daß in einem Dreieck die Summe der Seitenlängen von zwei Seiten stets eine obere Schranke für die Seitenlänge der dritten Seite ist.
- Damit ist die Menge

$$K := \big\{ z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = 1 \big\}$$

die Menge der Punkte in der Ebene, deren Abstand zum Ursprung genau 1 ist, d.h. K ist der Einheitskreis um den Ursprung. Man beachte, daß bei einem Punkt

$$z = x + iy,$$

der auf dem Einheitskreis liegt, die kartesichen Koordinaten x und y schon vollständig durch den Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ bestimmt sind, den der Vektor z mit der x-Achse einschließt. Es gilt nämlich (siehe Abbildung 5)

$$x = \cos(\alpha)$$

und

$$y = \sin(\alpha)$$

und somit

$$z = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha).$$

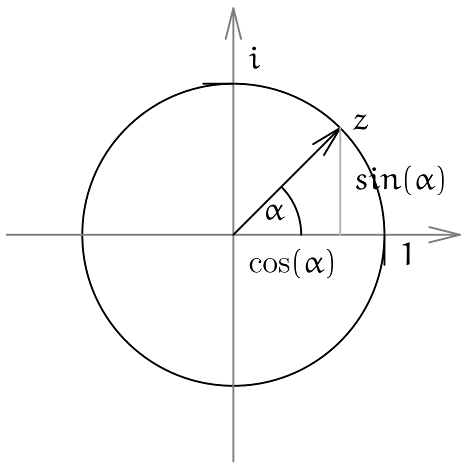


Abbildung 5. Koordinaten eines Punktes $z = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$ auf dem Einheitskreis

- Es bleibt, die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $0 \neq z, w \in \mathbb{C}$ geometrisch zu deuten. Dazu schreiben wir die Zahl z als

$$z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = r \cdot z'$$

mit $r = |z|$ und $z' = \frac{z}{|z|}$. Man beachte, daß die Zahl z' den Betrag 1 hat, so daß es genau einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ gibt mit

$$z' = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha).$$

Die komplexe Zahl $z \neq 0$ ist also eindeutig durch ihren Betrag und den Winkel α bestimmt. Wir nennen

$$\arg(z) := \alpha$$

das *Argument* von z und das Paar

$$(r, \alpha) = \big(|z|, \arg(z)\big)$$

die *Polarkoordinaten* von z.

Wir erinnern hier an die beiden Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus (siehe auch Satz 12.38):

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \tag{12}$$

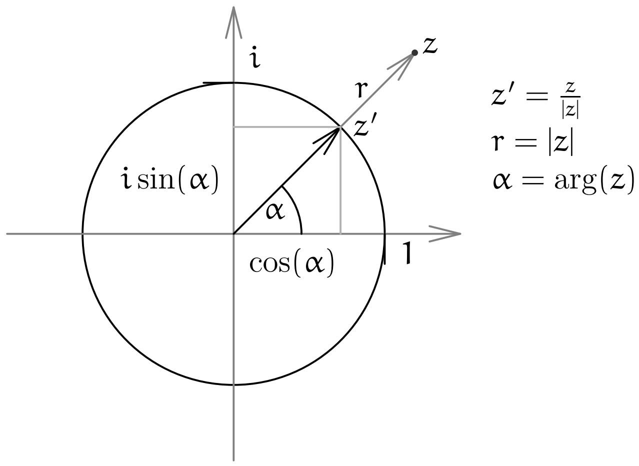


Abbildung 6. Polarkoordinaten von $z = r \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha))$

und

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta). \tag{13}$$

Betrachten wir zunächst die Multiplikation von zwei komplexen Zahlen $z = |z| \cdot \big(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\big)$ und $w = |w| \cdot \big(\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)\big)$:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w| \cdot \big(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\big) \cdot \big(\cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)\big) \\ &= |z| \cdot |w| \cdot \big(\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\big) + i \cdot \big(\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)\big) \\ &\overset{(12),(13)}{=} |z| \cdot |w| \cdot \big(\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)\big). \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen werden also multipliziert, indem man die Argumente addiert und die Beträge multipliziert (siehe Abbildung 7).

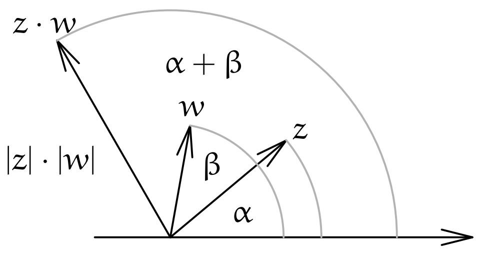


Abbildung 7. Multiplikation zweier komplexer Zahlen

In Polarkoordinaten könnte man dies schreiben als

$$(r, \alpha) \cdot (s, \beta) = (r \cdot s, \alpha + \beta).$$

Beispiel 10.10
Zur Ermittlung von $\alpha = \arg(z)$ für $z = i - 1$ betrachten wir die Zahl

$$\frac{z}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

vom Betrag 1, für die gilt

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha),$$

d.h. $\cos(\alpha) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, also $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

Bemerkung 10.11 (n-te Wurzeln)
Aus der Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl

$$w = r \cdot \big(\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)\big)$$

läßt sich leicht ableiten, daß die Zahl

$$a = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\alpha}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\alpha}{n}\right)\right)$$

eine n-te Wurzel aus w ist, d.h.

$$a^n = w.$$

Dabei ist $\sqrt[n]{r}$ die eindeutig bestimmte nicht-negative n-te Wurzel der nicht-negativen Zahl r.

Die obige Zahl a ist aber nicht die einzige Lösung der Gleichung

$$z^n = w$$

in $\mathbb{C}$. Denn addiert man zum Argument einen der folgenden Winkel

$$\frac{2\pi k}{n}, \quad \text{mit } k = 1, \ldots, n-1,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\alpha+2\pi k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\alpha+2\pi k}{n}\right)\right)\right)^n &= \sqrt[n]{r}^n \cdot (\cos(\alpha + 2\pi k) + i \cdot \sin(\alpha + 2\pi k))\\ &= \sqrt[n]{r}^n \cdot (\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)) = w.\end{aligned}$$

Wir haben also in der Tat n verschiedene n-te Wurzeln von w gefunden:

$$a_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\alpha+2\pi\cdot k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\alpha+2\pi\cdot k}{n}\right)\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Damit sehen wir, daß die Polynomgleichung

$$z^n = 1$$

in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen hat, wobei n der Grad der Gleichung ist. Das ist ein Spezialfall des Fundamentalsatzes der Algebra.

Aufgaben

Aufgabe 10.12
Bestimme für die folgenden komplexen Zahlen $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1}:

(a) $z = i - 1$.

(b) $z = \frac{4i}{1+i}$.

(c) $z = \frac{(2+2i)^7}{(1-i)^3}$.

KAPITEL II

Eindimensionale Analysis

Im folgenden wollen wir die eindimensionale Analysis entwickeln, teilweise nur über den reellen Zahlen, teilweise parallel über den reellen und den komplexen Zahlen. Deshalb führen wir folgende Notation ein.

Im folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ einer der beiden Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

§ 11 Folgen und ihre Grenzwerte

A) Konvergente Folgen

Definition 11.1 (Folgen)
Eine *Folge* in $\mathbb{K}$ ist eine Abbildung

$$\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$$

von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{K}$.

Notation 11.2 (Familienschreibweise für Folgen)
Eine Folge $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ ist eindeutig festgelegt durch ihre Funktionswerte $a_n := \alpha(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Wir schreiben deshalb statt $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ gemeinhin nur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Manchmal ist es angenehmer, eine Folge nicht bei 1 starten zu lassen, sondern bei einer anderen ganzen Zahl k. Dann schreiben wir für die Folge schlicht $(a_n)_{n\geq k}$. Formal würde dem dann die Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : n \mapsto a_{n+k-1}$$

entsprechen.

Beispiel 11.3

a. Ist $c \in \mathbb{K}$, so heißt $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : n \mapsto c$ eine *konstante Folge*. Es gilt $a_n = c$ für $n \in \mathbb{N}$, und mithin $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_{n\in\mathbb{N}}$.
b. Für $q \in \mathbb{K}$ ist auch $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K} : n \mapsto q^n$ eine Folge mit $a_n = q^n$, also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c. $\left(\frac{1}{n-1}\right)_{n\geq 2}$ ist ein Beispiel für eine Folge in $\mathbb{K}$, bei der der Folgenindex nicht bei 1 startet.

Definition 11.4 (Konvergenz und Grenzwert)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$.

a. Wir nennen a genau dann einen *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn

$$\forall\, 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq n_\varepsilon \;:\; |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall sagen wir auch, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* a *konvergiert* und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

oder

$$a_n \longrightarrow a.$$

b. Wir nennen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbb{K}$ gibt, so daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Andernfalls nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *divergent*.

c. Wir nennen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ eine *Nullfolge*, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, d.h. $a_n \longrightarrow 0$.

Beispiel 11.5

a. Die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$. Um das zu sehen, wählen wir für eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ die natürliche Zahl $n_\varepsilon = 0$, so daß für jedes $n \geq n_\varepsilon = 0$ gilt

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

b. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Denn: sei $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ gegeben, so gibt es nach Korollar 9.4 eine natürliche Zahl n_ε, so daß $0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Ist nun $n \geq n_\varepsilon$, so folgt

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

c. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Denn: nehmen wir an, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a. Dann gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ein n_ε, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$. Insbesondere gilt dann wegen der Dreiecksungleichung

$$2 = |(-1)^{n_\varepsilon} - (-1)^{n_\varepsilon+1}| = |a_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon+1}| \leq |a_{n_\varepsilon} - a| + |a - a_{n_\varepsilon+1}| < \varepsilon + \varepsilon = 1,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist.

Lemma 11.6 (Geometrische Folge)
Es sei $q \in \mathbb{K}$ *mit* $|q| < 1$, *so ist* $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $q \neq 0$, da die Folge sonst sicher eine Nullfolge ist.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir betrachten die reelle Zahl

$$x := \frac{1}{|q|} - 1 > 0,$$

die positiv ist, da nach Voraussetzung $0 < |q| < 1$. Nach Korollar 9.4 gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$\frac{1}{n_\varepsilon} < x \cdot \varepsilon \tag{14}$$

Ist nun $n \geq n_\varepsilon$, so gilt wegen $|q| = \frac{1}{1+x}$ und der Bernoullischen Ungleichung auch

$$|q^n - 0| = |q|^n = \frac{1}{(1+x)^n} \overset{9.7}{\leq} \frac{1}{1+n\cdot x} < \frac{1}{n\cdot x} \leq \frac{1}{n_\varepsilon \cdot x} \overset{(14)}{<} \frac{x\cdot\varepsilon}{x} = \varepsilon.$$

□

Bemerkung 11.7
Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gilt offenbar:

$$a_n \longrightarrow a \quad \Longleftrightarrow \quad a_n - a \longrightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n - a| \longrightarrow 0.$$

Diese Feststellung ist in mancher Anwendung von Nutzen, um Argumente abzukürzen.

Proposition 11.8 (Eindeutigkeit des Grenzwertes von Folgen)
Der Grenzwert einer konvergenten Folge in $\mathbb{K}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Nehmen wir an, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ besitze zwei verschiedene Grenzwerte $a, b \in \mathbb{K}$. Dann ist die reelle Zahl

$$\varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0$$

positiv. Mithin gibt es zwei natürliche Zahlen $n_\varepsilon, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für $n \geq n_\varepsilon$ und

$$|a_n - b| < \varepsilon$$

für $n \geq n'_\varepsilon$. Setzen wir nun $N := \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, so gilt

$$|a-b| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b|,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist. □

B) Beschränkte Folgen

Definition 11.9 (Beschränkte Folgen)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge

$$\big\{|a_n| \in \mathbb{R} \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\}$$

beschränkt ist, d.h. wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $|a_n| \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Man beachte dabei, daß die Menge stets durch 0 nach unten beschränkt ist, und wir nennen eine Zahl s wie oben eine Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel 11.10

a. Die konvergente Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, da $\left|\frac{1}{n}\right| \leq 1$ für alle $n \geq 1$.

b. Die divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ebenfalls beschränkt, da $\big\{|a_n| \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\big\} = \{1\}$.

Satz 11.11 (Konvergente Folgen sind beschränkt.)
Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ *ist beschränkt.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gibt es zu $\varepsilon = 1$ eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1$$

für $n \geq n_\varepsilon$. Setze

$$s := \max\{1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_\varepsilon - 1}|\},$$

wobei man beachte, dass das Maximum existiert, weil die Menge endlich ist.

Damit erhalten wir dann

$$|a_n| \leq \begin{cases} s, & \text{falls } n < n_\varepsilon, \\ |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq s, & \text{falls } n \geq n_\varepsilon. \end{cases}$$

Mithin ist s eine Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Beispiel 11.12

a. Beispiel 11.10 zeigt, dass die Umkehrung von Satz 11.11 nicht gilt.

b. Für $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt, also auch nicht konvergent.

c. Für $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| > 1$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und somit divergent.
Um dies zu sehen, nehmen wir an, $s > 0$ sei eine Schranke für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und setzen $x := |q| - 1 > 0$. Da $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist (siehe Satz 9.3), gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$s < n \cdot x.$$

Aus der Bernoullischen Ungleichung erhalten wir damit

$$|q|^n = (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x > s,$$

was ein Widerspruch zur Wahl von s als Schranke von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Dies zeigt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist.

Lemma 11.13
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge in* $\mathbb{K}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beschränkte Folge in* $\mathbb{K}$, *so ist* $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis: Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine positive reelle Zahl $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$|b_n| \leq s$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen $a_n \longrightarrow 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{s}$$

für $n \geq n_\varepsilon$. Für $n \geq n_\varepsilon$ erhalten wir damit

$$|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n - 0 \cdot b_n| = |a_n - 0| \cdot |b_n| \leq |a_n - 0| \cdot s < \frac{\varepsilon}{s} \cdot s = \varepsilon.$$

Mithin konvergiert $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. □

Beispiel 11.14
Da die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und da zudem die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt

$$\frac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0.$$

C) Grenzwertsätze und Konvergenzkriterien

Proposition 11.15 (Grenzwertsätze)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K}$ mit $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$.

a. $a_n + b_n \longrightarrow a + b$ *und* $a_n - b_n \longrightarrow a - b$.

b. $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$.

c. $|a_n| \longrightarrow |a|$.

d. *Ist zudem $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ ist konvergent mit*

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}.$$

Beweis:

a. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es natürliche Zahlen $n_\varepsilon', n_\varepsilon'' \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $n \geq n_\varepsilon'$ und

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $n \geq n_\varepsilon''$. Mit $n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon', n_\varepsilon''\}$ gilt dann

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n \geq n_\varepsilon$. Mithin konvergiert $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a + b$. Analog sieht man $a_n - b_n \longrightarrow a - b$.

b. Nach Satz 11.11 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konvergente Folge beschränkt und nach Voraussetzung ist $(b_n - b)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so dass

$$a_n \cdot (b_n - b) \longrightarrow 0$$

nach Lemma 11.13. Analog ist nach Voraussetzung $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und die konstante Folge $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ ist als konvergente Folge beschränkt, so dass

$$(a_n - a) \cdot b \longrightarrow 0.$$

Aus a. folgt dann, dass die Summe der beiden Nullfolgen eine Nullfolge ist, d.h.

$$a_n \cdot b_n - a \cdot b = a_n \cdot (b_n - b) + (a_n - a) \cdot b \longrightarrow 0 + 0 = 0.$$

Also gilt auch $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b$.

c. Ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Aber dann gilt nach Lemma 10.7 auch

$$\big||a_n| - |a|\big| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Es folgt die Behauptung.

d. Wegen $b \neq 0$ ist

$$\epsilon := \frac{|b|}{2} > 0$$

und es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \epsilon = \frac{|b|}{2}$$

für alle $n \geq n_0$. Mithin ist

$$|b| = |b_n + (b - b_n)| \leq |b_n| + |b - b_n| = |b_n| + |b_n - b| < |b_n| + \frac{|b|}{2},$$

so dass $0 < \frac{|b|}{2} \leq |b_n|$ für $n \geq n_0$. Insbesondere ist $b_n \neq 0$ in diesen Fällen. Aus Lemma 8.17 folgt zudem

$$0 < \frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|} \tag{15}$$

für $n \geq n_0$.

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \geq n_0$ mit

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2} \tag{16}$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für diese n erhalten wir damit

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n \cdot b|} = \frac{1}{|b_n|} \cdot \frac{1}{|b|} \cdot |b_n - b| \overset{(15),(16)}{<} \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2} = \varepsilon.$$

Also gilt

$$\frac{1}{b_n} \longrightarrow \frac{1}{b},$$

und mit Teil b. folgt dann die Behauptung $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

□

Beispiel 11.16

a. Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$.

b. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{7n^2+3}{4n^2+n+1}$$
ist wegen der Grenzwertsätze konvergent, denn es gilt
$$a_n = \frac{7+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \longrightarrow \frac{7+0}{4+0+0} = \frac{7}{4}.$$

Proposition 11.17 (Einschachtelungssatz)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$, und sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge reeller Zahlen.

a. *Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$, so ist $a \leq b$.*
b. *Ist $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$ und ist $a = b$, so gilt $c_n \longrightarrow a$.*

Beweis:

a. Nehmen wir $b < a$ an, so gibt es für
$$\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$$
natürliche Zahlen $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit
$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$
für alle $n \geq n'_\varepsilon$ und
$$b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$
für alle $n \geq n''_\varepsilon$. Mithin gilt für $n = \max\{n_0, n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$
$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n < b + \varepsilon,$$
so dass
$$a - b < 2 \cdot \varepsilon = a - b. \quad ↯$$

b. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es natürliche Zahlen $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit
$$|a_n - a| < \varepsilon$$
für alle $n \geq n'_\varepsilon$ und
$$|b_n - a| < \varepsilon$$
für alle $n \geq n''_\varepsilon$. Mithin gilt für $n \geq n_\varepsilon := \max\{n_0, n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ sicher
$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$
d.h.
$$|c_n - a| < \varepsilon.$$
Also konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

□

Beispiel 11.18
Wegen $0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ und $k \geq 1$ folgt aus $0 \longrightarrow 0$ und $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ auch

$$\frac{1}{n^k} \longrightarrow 0.$$

Definition 11.19 (Monotone Folgen)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Wir nennen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend*, falls

$$a_n \leq a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.
Analog nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallend*, falls

$$a_n \geq a_{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 11.20
Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und divergent, die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und konvergent.

Satz 11.21 (Monotoniekriterium)
Jede monoton wachsende oder fallende, beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ *ist konvergent.*

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge reeller Zahlen und sei $s > 0$ eine Schranke. Dann ist die Menge

$$A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nach oben beschränkt durch s, und somit existiert das Supremum

$$a := \sup(A).$$

Wir wollen zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von a, so dass ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}.$$

Da die Folge monoton wachsend ist, gilt dann aber für alle $n \geq n_\varepsilon$ auch

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon,$$

oder anders formuliert

$$|a - a_n| = |a_n - a| < \varepsilon.$$

Mithin haben wir $a_n \longrightarrow a$ gezeigt. Der Fall einer monoton fallenden Folge wird analog mit Hilfe des Infimums bewiesen. □

Bemerkung 11.22 (Supremum und Infimum sind Grenzwerte von Folgen.)
Es sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge reeller Zahlen.

a. Ist A nach oben beschränkt, so gibt es eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen $\sup(A)$ konvergiert.

b. Ist A nach unten beschränkt, so gibt es eine monoton fallende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen $\inf(A)$ konvergiert.

Beweis: Sei zunächst A nach oben beschränkt. Wir wählen $a_0 \in A$ beliebig und setzen $a := \sup(A)$. Für $n \geq 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{n}$ gibt es ein $b_n \in A$ mit $a - \varepsilon < b_n \leq a$. Setzen wir nun $a_n := \max\{b_n, a_{n-1}\} \in A$, so definieren wir auf diese Weise rekursiv eine offenbar monoton steigende Folge in A. Für diese gilt zudem

$$a \longleftarrow a - \frac{1}{n} < b_n \leq a_n \leq a,$$

woraus mit dem Einschachtelungssatz folgt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Ist A nach unten beschränkt, so zeigt man die Aussage analog. □

Beispiel 11.23 (Rekursive Folgen — das Heron-Verfahren)
Es sei $c \in \mathbb{R}_{>0}$ eine positive reelle Zahl. Wir setzen $a_0 := 1$ und für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir a_{n+1} durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) > 0.$$

Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

1. Schritt: $a_{n+1}^2 \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$: Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$0 \leq \left(a_n - \frac{c}{a_n}\right)^2 = a_n^2 - 2c + \frac{c^2}{a_n^2}.$$

Addieren wir auf beiden Seiten $4c$, so erhalten wir

$$0 \leq 4c \leq a_n^2 + 2c + \frac{c^2}{a_n^2} = \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)^2 = 4 \cdot a_{n+1}^2.$$

2. Schritt: $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend: Aus dem 1. Schritt wissen wir, dass $a_n^2 \geq c$ für $n \geq 1$ und mithin auch

$$a_n \geq \frac{c}{a_n}$$

für $n \geq 1$ gilt. Wir erhalten damit

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot (a_n + a_n) = a_n$$

für alle $n \geq 1$, so dass die Folge monoton fallend ist.

3. Schritt: $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt: Denn $0 < a_n \leq a_1$ für alle $n \geq 1$.

4. Schritt: $a_n \longrightarrow \sqrt{c}$: Da die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und beschränkt ist, folgt aus Satz 11.21 dann, dass sie konvergent ist, d.h. es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \longrightarrow a$. Den Grenzwert können wir nun mit Hilfe der Grenzwertsätze und der Eindeutigkeit des Grenzwertes bestimmen; es gilt nämlich

$$a \longleftarrow a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{c}{a}\right),$$

d.h.
$$a = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{c}{a}\right).$$
Lösen wir die Gleichung nach a auf, so erhalten wir
$$a^2 = c,$$
und da die Folgenglieder nie negativ sind, kann auch der Grenzwert nicht negativ sein (siehe Proposition 11.17). Damit ist also $a = \sqrt{c}$ nach Satz 9.8.

Beachte, dass man die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nutzen kann, um die Wurzel $\sqrt{c}$ näherungsweise zu berechnen — man nennt dieses rekursive Verfahren auch das *Heron-Verfahren*. Versuchen Sie dies einmal für $c = 2$ oder $c = 4$.

D) Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition 11.24 (Teilfolge)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und ist zudem
$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$$
eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, so nennen wir die Folge
$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \ldots)$$
eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel 11.25
Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 11.26 (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Wir unterscheiden im Beweis die Fälle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. **Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:** Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es eine Zahl $s > 0$, so dass
$$-s \leq a_n \leq s$$
für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. das Intervall
$$[b_1, c_1] := [-s, s]$$
enthält unendlich viele Folgenglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und wir wählen eines davon, a_{n_1}. Teilen wir das Intervall in zwei gleichgroße Hälften $[-s, 0]$ und $[0, s]$, so enthält mindestens eines der beiden neuen Intervalle wieder unendlich viele Folgenglieder. Wir wählen ein solches und nennen es $[b_2, c_2]$. Da es unendlich viele Folgenglieder enthält, enthält es auch ein a_{n_2} mit $n_2 > n_1$. Mit dem Intervall $[b_1, c_1]$ verfahren wir in der gleichen Weise und konstruieren so rekursiv eine Folge von Intervallen
$$[b_1, c_1] \supsetneqq [b_2, c_2] \supsetneqq [b_3, c_3] \supsetneqq [b_4, c_4] \supsetneqq \ldots,$$

so dass jedes $[b_j, c_j]$ unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält. Zugleich konstruieren wir dabei eine Teilfolge

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \ldots$$

mit

$$b_j \leq a_{n_j} \leq c_j$$

und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.
Aufgrund der Konstruktion ist die Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beschränkte Folge und besitzt deshalb einen Grenzwert nach dem Monotoniekriterium 11.21, d.h.

$$b_j \longrightarrow b.$$

Analog besitzt $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ als monoton fallende beschränkte Folge einen Grenzwert c. Da das Intervall $[b_n, c_n]$ aufgrund seiner Definition die Länge $\frac{2s}{2^{n-1}}$ hat, folgt dann

$$c - b \longleftarrow c_n - b_n = \frac{2s}{2^{n-1}} = 4s \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \longrightarrow 0,$$

wobei wir für die Konvergenz der rechten Seite die Eigenschaften der geometrischen Folge berücksichtigen (siehe Lemma 11.6). Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge gilt dann $b = c$, und aus dem Einschachtelungssatz folgt dann auch

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = b.$$

2. Fall: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$**:** Aus Lemma 10.7 wissen wir, dass

$$|\operatorname{Re}(a_n)| \leq |a_n|,$$

so dass die Folge $\big(\operatorname{Re}(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls beschränkt ist. Da wir den Satz von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bereits bewiesen haben, gibt es also eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine reelle Zahl b, so dass

$$\operatorname{Re}(a_{n_k}) \longrightarrow b.$$

Ebenfalls aus Lemma 10.7 folgt

$$|\operatorname{Im}(a_{n_k})| \leq |a_{n_k}|,$$

so dass auch die Folge $\big(\operatorname{Im}(a_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und wieder folgt mittels des Satzes von Bolzano-Weierstraß für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dass $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(a_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ besitzt und dass es eine reelle Zahl c gibt, so dass

$$\operatorname{Im}(a_{n_{k_j}}) \longrightarrow c.$$

Aus Aufgabe 11.37 wissen wir, dass die Teilfolge $\big(\operatorname{Re}(a_{n_{k_j}})\big)_{j\in\mathbb{N}}$ von $\big(\operatorname{Re}(a_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen b konvergiert, und aus Aufgabe 11.36 ergibt sich dann, dass auch die Folge $(a_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit

$$a_{n_{k_j}} = \operatorname{Re}(a_{n_{k_j}}) + i \cdot \operatorname{Im}(a_{n_{k_j}}) \longrightarrow b + i \cdot c.$$

□

Beispiel 11.27
Die divergente beschränkte Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt als konvergente Teilfolge die konstante Folge $\big((-1)^{2k}\big)_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz 11.28 (Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen.)
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente Folge im abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$*, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in [a, b].$$

Beweis: Aus $a \leq a_n \leq b$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Teil a von Proposition 11.17 sofort, dass $a \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq b_n$. □

E) Das Cauchy-Kriterium

Definition 11.29 (Cauchy-Folge)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall\, 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \;\; \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, m > n \geq n_\varepsilon \;:\; |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Satz 11.30 (Cauchy-Kriterium: $\mathbb{K}$ ist vollständig.)
Eine Folge in $\mathbb{K}$ *ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis:

$\Longrightarrow$: Wir setzen voraus, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist mit Grenzwert a. Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Für zwei natürliche Zahlen $m > n \geq n_\varepsilon$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

$\Longleftarrow$: Sei nun umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wir wollen zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und müssen dazu einen Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, was nicht ganz leicht ist. Unsere Idee hierzu ist, dass wir eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß finden und dann zeigen, dass deren Grenzwert auch ein Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

1. Schritt: Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.[1]

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon = 1$$

für alle $m > n \geq n_\varepsilon$. Setze

$$s := \max\{1 + |a_{n_\varepsilon}|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_\varepsilon - 1}|\}.$$

[1] Der Beweis geht wie der Beweis von Satz 11.11, wenn man dort den Grenzwert a durch a_{n_ε} ersetzt.

Damit erhalten wir dann

$$|a_n| \leq \begin{cases} s, & \text{falls } n < n_\varepsilon, \\ |a_n - a_{n_\varepsilon}| + |a_{n_\varepsilon}| < 1 + |a_{n_\varepsilon}| \leq s, & \text{falls } n \geq n_\varepsilon. \end{cases}$$

Mithin ist s eine Schranke für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Schritt: Aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstraß 11.26 besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und wir setzen

$$a := \lim_{k\to\infty} a_{n_k}.$$

3. Schritt: Zeige, $a_n \longrightarrow a$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $m > n \geq n_\varepsilon$. Da zudem $a_{n_k} \longrightarrow a$ existiert auch ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \geq k_\varepsilon$. Wir wählen nun eine Zahl $k \geq k_\varepsilon$ so, dass $n_k \geq n_\varepsilon$. Dann gilt für jedes $n \geq n_\varepsilon$ auch

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

□

Beispiel 11.31

Ist $1 \neq q \in \mathbb{K}$ mit $|q| = 1$, so ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge und mithin auch nicht konvergent.

Um dies zu sehen, betrachten wir $\varepsilon = |q-1| > 0$ und $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ beliebig. Für $m = n_\varepsilon+1$ und $n = n_\varepsilon$ gilt dann

$$|q^m - q^n| = |q|^n \cdot |q-1| = 1^n \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Wäre die Folge eine Cauchy-Folge, so müsste der Ausdruck für ein geeignetes n_ε echt kleiner als ε werden.

Bemerkung 11.32 ($\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.)

Eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen muss in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent sein, d.h. ihr Grenzwert in $\mathbb{R}$ muss keine rationale Zahl sein. Zum Beispiel ist $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl (siehe Satz 9.10) und ist $\sqrt{2} = \sum_{i=-1}^{\infty} c_i \cdot 10^{-i}$ ihre Dezimalzahldarstellung, so wird durch

$$a_n = \sum_{i=-1}^{n} c_i \cdot 10^{-i}$$

eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen definiert, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert und mithin eine Cauchy-Folge ist, deren Grenzwert $\sqrt{2}$ aber nicht in $\mathbb{Q}$ liegt.

Man sagt auch, die rationalen Zahlen sind nicht vollständig.Dieses Manko der rationalen Zahlen erfordert den Übergang zu den reellen Zahlen. Mit dem gleichen Argument wie für $\sqrt{2}$ sieht man übrigens, dass jede reelle Zahl Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen ist. Dies liegt daran, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt (siehe Satz 9.6).

F) Bestimmt divergente Folgen

Definition 11.33 (Bestimmte Divergenz)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

a. Wir sagen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergiert gegen* ∞, falls

$$\forall\, s > 0\; \exists\, n_s \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq n_s \;:\; a_n > s.$$

In diesem Fall schreiben wir $a_n \longrightarrow \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, und nennen ∞ auch den uneigentlichen *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Analog sagen wir, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergiert gegen* $-\infty$, falls

$$\forall\, s < 0\; \exists\, n_s \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq n_s \;:\; a_n < s.$$

In diesem Fall schreiben wir $a_n \longrightarrow -\infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, und nennen $-\infty$ auch den uneigentlichen *Grenzwert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Eine Folge, die bestimmt divergiert nennen wir *bestimmt divergent.*

Beispiel 11.34
Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent mit Grenzwert ∞, die Folge $\big((-1)^n \cdot n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent.

Bemerkung 11.35 (Grenzwertsätze für uneigentliche Grenzwerte)
Wir einigen uns für $a \in \mathbb{R}$ auf die folgenden Rechenregeln:

- $a + \infty := \infty$ und $a - \infty := -\infty$.
- $a \cdot \infty := \infty$ und $a \cdot -\infty := -\infty$, falls $a > 0$.
- $a \cdot \infty := -\infty$ und $a \cdot -\infty := \infty$, falls $a < 0$.
- $\frac{a}{\infty} := 0$ und $\frac{a}{-\infty} := 0$.

Damit lassen sich die Grenzwertsätze für Folgen 11.15 verallgemeinern auf Fälle unter Einbeziehung von bestimmt divergenten Folgen. Wann immer man bei der Anwendung der Grenzwertsätze als Grenzwert einen der obigen Ausdrücke erhält, kann man den Grenzwert auf dem Weg berechnen. Die Beweise sind einfach, aber es gilt viele Fälle zu unterscheiden. Z.B. gelten:

a. Wenn $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow \infty$, so gilt $a_n + b_n \longrightarrow a + \infty = \infty$.
b. Wenn $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow \infty$, so gilt $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{a}{\infty} = 0$.

Zudem kann man die Grenzwertsätze auch für Brüche von Folgen formulieren, wenn im Nenner eine Nullfolge steht. Allerdings ist dabei etwas Vorsicht geboten:

a. Wenn $a_n \longrightarrow a \neq 0$ und $b_n \longrightarrow 0$ mit $b_n > 0$ für $n \geq n_0$, so gilt $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \infty \cdot a$.

b. Wenn $a_n \longrightarrow a \neq 0$ und $b_n \longrightarrow 0$ mit $b_n < 0$ für $n \geq n_0$, so gilt $\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow -\infty \cdot a$.

c. Ist das Vorzeichen der b_n nicht ab einer gewissen Stelle fest, so existiert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ nicht.

Aufgaben

Aufgabe 11.36

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a. $a_n \longrightarrow a$.

b. $\mathrm{Re}(a_n) \longrightarrow \mathrm{Re}(a)$ und $\mathrm{Im}(a_n) \longrightarrow \mathrm{Im}(a)$.

Aufgabe 11.37

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen.

a. Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, so konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

b. Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Aufgabe 11.38

a. Zeigen Sie, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

konvergent ist.

b. Zeigen Sie, dass die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$t_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

konvergent ist.

c. Zeigen Sie, dass die Grenzwerte von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ übereinstimmen. Wir nennen den Grenzwert die *Eulersche Zahl* e.

Hinweis zu Teil c., zeigen Sie hierfür, daß der Grenzwert von $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten durch s_m beschränkt ist.

Aufgabe 11.39

Untersuchen Sie die folgenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und berechne gegebenenfalls den Grenzwert:

a. $a_n = \frac{n^4-3n+5}{3n^5+6n^3+11}$.

b. $a_n = \frac{(3n+1)\cdot(n+1)^2-5(n-1)}{1+n+n^2}$.

c. $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$.

d. $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$.

e. $a_n = \frac{n}{2^n}$.

Aufgabe 11.40

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n}$$

konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Hinweis: Prüfen Sie die Folge (bzw. eine geeignete Teilfolge) auf Monotonie und Beschränktheit. Für die Berechnung des Grenzwertes können dann die Grenzwertsätze geeignet angewandt werden.

Aufgabe 11.41

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} := 1 + \frac{1}{a_n}$$

konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Hinweis: Prüfen Sie die Folge (bzw. eine geeignete Teilfolge) auf Monotonie und Beschränktheit. Für die Berechnung des Grenzwertes können dann die Grenzwertsätze geeignet angewandt werden.

Aufgabe 11.42

a. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es sich um eine konvergente Folge handelt.

b. Bleibt die Behauptung aus Aufgabenteil a. korrekt, wenn wir die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ voraussetzen? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

§ 12 Unendliche Reihen

A) Konvergenz unendlicher Reihen

Definition 12.1 (Unendliche Reihen)
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, so nennen wir die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

der *Partialsummen* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch die durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definierte *Reihe*.

Die Reihe heißt *konvergent*, wenn $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge ist, und andernfalls heißt sie *divergent*.

Wir bezeichnen sowohl die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst, als auch ihren Grenzwert, sofern er existiert, mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Beachte, wie stets bei Folgen müssen weder $(a_n)_{n\geq n_0}$ noch $(s_m)_{m\geq n_0} = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (wobei $s_m = \sum_{k=n_0}^{m} a_k$) mit dem Index 1 starten, sondern können mit $n_0 \in \mathbb{Z}$ starten!

Beispiel 12.2 (Teleskopsumme)
Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1$.

Dazu beachten wir, dass $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ gilt, so dass

$$\begin{aligned} s_n =& \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ =& \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ =& 1 - \frac{1}{n+1} \longrightarrow 1. \end{aligned}$$

Summen, die sich wie s_n auf zwei Summanden reduzieren, weil sich die übrigen Teile der Summe sukzessive auslöschen, nennt man *Teleskopsummen*.

Beispiel 12.3 (Harmonische Reihe)
Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.

Denn für $n_k = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
s_{n_k} &= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{k}{2} \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

so dass $(s_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine divergente Teilfolge der Folge der Partialsummen ist, weshalb letztere nicht konvergent sein kann.

Lemma 12.4 (Grenzwertsätze für konvergente Reihen)
Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ und $a \in \mathbb{K}$.

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot a_n = a \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

d. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *und* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Insbesondere, sind die Reihen in a.-c. konvergent.

Beweis: Die Aussagen folgen unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Folgen 11.15 sowie aus Proposition 11.17 angewendet auf die Folgen der Partialsummen. □

B) Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Proposition 12.5 (Cauchy-Kriterium für Reihen)
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. Genau dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ :\ \forall\, m > n \geq n_\varepsilon\ :\ \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon.$$

Beweis: Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen 11.30, da

$$s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k.$$

□

Lemma 12.6 (Restglieder einer konvergenten Reihe)
Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so ist die Folge der Restglieder eine Nullfolge, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0.$$

Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es wegen des Cauchy-Kriteriums für Reihen ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n \geq n_\varepsilon$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Halten wir n fest und betrachten die linke Seite als eine Folge mit Index m, so erhalten wir aus dem Einschachtelungssatz 11.17

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| = \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Also ist die Folge der Restglieder eine Nullfolge. □

Lemma 12.7 (Nullfolgekriterium)
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe in* $\mathbb{K}$*, so ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis: Man beachte, dass die Partialsummen s_n der Reihe folgende Eigenschaft erfüllen:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Aus den Grenzwertsätzen für Folgen 11.15 folgt deshalb, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Differenz zweier konvergenter Folgen konvergent ist und dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.$$

□

Beispiel 12.8

a. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist divergent, da $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist.

b. Die Umkehrung von Lemma 12.7 gilt nicht, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Satz 12.9 (Geometrische Reihe)
Es sei $q \in \mathbb{K}$.

a. *Ist* $|q| < 1$*, so ist die* geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *konvergent mit Grenzwert*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

b. *Ist* $|q| \geq 1$*, so ist die* geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *divergent.*

Beweis:

a. Aus Satz 7.12 wissen wir
$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$
und da $|q| < 1$ gilt dann wegen Lemma 11.6
$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \longrightarrow \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$
b. Für $|q| \geq 1$ ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge (siehe Beispiele 11.12 und 11.31), und somit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ aufgrund des Nullfolgenkriteriums 12.7 divergent.

□

Satz 12.10 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen in $\mathbb{R}$)
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *eine monoton fallende Nullfolge in* $\mathbb{R}$*, so konvergiert die Reihe*
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n.$$

Beweis: Es sei wieder $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot a_k$ die n-te Partialsumme der Reihe. Wir betrachten nun zunächst die Teilfolge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ der *geraden* Partialsummen. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann
$$s_{2\cdot(n+1)} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n},$$
da nach Voraussetzung $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$. Die Folge $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also monoton fallend.

Analog sieht man, dass die Folge $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ der *ungeraden* Partialsummen monoton steigend ist, denn
$$s_{2\cdot(n+1)+1} = s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1}.$$
Damit sind beide Folgen dann aber auch beschränkt, denn
$$s_1 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_0$$
für $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund des Monotoniekriteriums 11.21 sind also beide Folgen konvergent, d.h. es gibt reelle Zahlen $s, t \in \mathbb{R}$ mit
$$s_{2n} \longrightarrow s \quad \text{und} \quad s_{2n+1} \longrightarrow t.$$
Aus den Grenzwertsätzen für Folgen erhalten wir dann
$$s - t \longleftarrow s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \longrightarrow 0,$$
so dass $s = t$ gilt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es natürliche Zahlen $n'_\varepsilon, n''_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß
$$|s_{2n} - s| < \varepsilon$$
für alle $n \geq n'_\varepsilon$ und
$$|s_{2n+1} - s| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n''_\varepsilon$. Setzen wir nun $n_\varepsilon = \max\{2 \cdot n'_\varepsilon, 2 \cdot n''_\varepsilon + 1\}$, so gilt für $n \geq n_\varepsilon$ offenbar

$$|s_n - s| < \varepsilon.$$

Also ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. □

Beispiel 12.11 (Alternierende harmonische Reihe)
Die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ ist konvergent. Aus dem Beweis des Leibnizkriteriums wissen wir zudem, daß

$$\frac{1}{2} = s_1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \leq s_0 = 1.$$

Später werden wir sehen, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Lemma 12.12 (Umklammern in Reihen)
Es sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$ und $1 = k_1 < k_1 < k_2 < \ldots$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Setzen wir

$$b_n := \sum_{k=k_n}^{k_{n+1}-1} a_k = a_{k_n} + a_{k_n+1} + \ldots + a_{k_{n+1}-1}$$

so ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty b_n$ konvergent und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Beweis: Ist $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen zu $\sum_{n=1}^\infty a_n$ und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen zu $\sum_{n=1}^\infty b_n$, so gilt

$$t_n = s_{k_{n+1}-1}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Also ist $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und konvergiert wegen Aufgabe 11.37 gegen den gleichen Grenzwert. □

C) Absolut konvergente Reihen

Definition 12.13 (Umordnung)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Wir nennen die Folge

$$(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}, \ldots)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + a_{\sigma(3)} + a_{\sigma(4)} + \ldots$$

eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$.

Beispiel 12.14
Betrachten wir folgende Umordnung der alternierenden harmonischen Reihe

$$\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{8}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{12}+\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{14}\right)+\frac{1}{16}+\ldots,$$

d.h. in den Klammern sind sukzessive die ungeraden Folgenglieder a_n zusammen jeweils mit dem zugehörigen Folgenglied a_{2n} aufgeführt, und zwischen den Klammerausdrücken stehen der Reihe nach die Folgenglieder, deren Index durch 4 teilbar ist. Es ist klar, daß man auf dem Weg alle Glieder der harmonischen Reihe auflistet. Wenn diese Umordnung der harmonischen Reihe wieder konvergent ist, so können wir wegen Lemma 12.12 zur Berechnung des Grenzwertes auch die Klammern wie angegeben setzen. Der Grenzwert der Reihe ist dann

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\frac{1}{16}-\ldots=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

genau die Hälfte des Grenzwertes der harmonischen Reihe. Daraus ergibt sich folgende Erkenntnis:

Durch Umordnung einer konvergenten Reihe kann sich der Grenzwert ändern.

Definition 12.15
Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe ihrer *Absolut*beträge $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Da die Folge der Partialsummen $t_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ monoton wächst, ist dies gleichwertig dazu, daß die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist (siehe Monotoniekriterium 11.21 und Satz 11.11).

Beispiel 12.16
Die alternierende harmonische Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Lemma 12.17
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen des Cauchy-Kriteriums für Reihen eine natürliche Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\right| < \varepsilon$$

für alle $m > n \geq n_\varepsilon$, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Aus der Dreiecksungleichung wissen wir nun aber, daß dann auch

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\right| < \varepsilon$$

für alle $m > n \geq n_\varepsilon$ gilt. Mithin ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen konvergent. □

Man beachte, daß Beispiel 12.14 zeigt, daß im folgenden Satz die Voraussetzung *absolut konvergent* nicht durch die Bedingung *konvergent* ersetzt werden kann.

Satz 12.18 (Umordnungssatz)
Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent und konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.

Beweis: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sei bijektiv.

Wir wollen zunächst zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n - a_{\sigma(n)}\big)$ gegen Null konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, gibt es ein $n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \right| < \varepsilon$$

für alle $m > n \geq n'_\varepsilon$ gilt. Da die Abbildung σ surjektiv und die Menge $\{1, \ldots, n'_\varepsilon\}$ endlich ist, gibt es eine Zahl $n_\varepsilon \geq n'_\varepsilon$ mit

$$\{1, \ldots, n'_\varepsilon\} \subseteq \{\sigma(1), \ldots, \sigma(n_\varepsilon)\}.$$

Für $n \geq n_\varepsilon$ heben sich deshalb in der Partialsumme

$$\sum_{k=1}^{n} \big(a_k - a_{\sigma(k)}\big)$$

die a_i mit $i \leq n'_\varepsilon$ heraus, da sie einmal mit positivem und einmal mit negativem Vorzeichen auftreten. Die übrigen a_i können sich herausheben oder auch nicht; in letzterem Fall kommen sie in der Summe genau einmal (entweder mit positivem oder mit negativem Vorzeichen) vor. Setzen wir nun

$$m := \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n), 1, \ldots, n\} + 1 > n'_\varepsilon,$$

so erhalten wir insgesamt

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \big(a_k - a_{\sigma(k)}\big) - 0 \right| \leq \sum_{k=n'_\varepsilon+1}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n - a_{\sigma(n)}\big)$ gegen Null.

Aus den Grenzwertsätzen für Reihen 12.4 erhalten wir deshalb, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n - a_{\sigma(n)}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konvergent ist mit dem Grenzwert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wenden wir das Ergebnis auf die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und ihre Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} \big|a_{\sigma(n)}\big|$ an, so folgt auch, daß die Umordnung absolut konvergent ist. □

D) Konvergenzkriterien für absolute Konvergenz

Satz 12.19 (Majorantenkriterium)
Es seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *zwei Reihen in* $\mathbb{K}$. *Ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *absolut konvergent und* $|a_n| \leq |b_n|$ *für alle* $n \geq n_0$, *so ist auch* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Wir nennen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *dann eine konvergente* Majorante *von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis: Die Folge von Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

ist beschränkt durch $s_{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Also ist die Reihe absolut konvergent. □

Proposition 12.20 (Minorantenkriterium)
Es seien $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *zwei Reihen in* $\mathbb{R}$.
Ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergent und* $a_n \geq b_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so ist* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Wir nennen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *dann eine divergente* Minorante *von* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis: Wegen $b_n \geq 0$ ist die Folge der Partialsummen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$t_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$$

monoton wachsend. Da die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung divergent ist, ist sie wegen des Monotoniekriteriums für Folgen 11.21 nicht beschränkt. Aber dann ist auch die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$

unbeschränkt, wegen $s_n \geq t_n$, und mithin ist sie divergent nach Satz 11.11. □

Beispiel 12.21
Für $k \geq 2$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergent.

Dazu betrachten wir zunächst den Fall $k = 2$. Wegen

$$a_n := \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n \cdot (n+1)} =: b_n$$

ist wegen Beispiel 12.2 die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. Nehmen wir nun noch eine Indexverschiebung vor, so sehen wir, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

ebenfalls konvergent ist. Für den Fall $k > 2$ gilt nun wegen $0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2}$, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ihrerseits eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist.

Satz 12.22 (Wurzelkriterium)
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$.

a. *Existiert ein $q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für $n \geq n_0$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

b. *Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

Beweis: Ist $q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für $n \geq n_0$, d.h. $|a_n| \leq q^n$, so ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ nach Satz 12.9 eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Falls $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, d.h. $|a_n| \geq 1^n = 1$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und mithin ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wegen des Nullfolgekriteriums divergent. □

Satz 12.23 (Quotientenkriterium)
Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$.

a. *Existiert ein $q < 1$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für $n \geq n_0$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

b. *Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

Beweis: Wenn eine reelle Zahl $0 < q < 1$ existiert mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für $n \geq n_0$, so gilt

$$|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n|$$

für alle $n \geq n_0$, und mit Induktion sieht man dann, daß

$$|a_n| \leq q \cdot |a_{n-1}| \leq q^2 \cdot |a_{n-2}| \leq \ldots \leq q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|.$$

Also ist die geometrische Reihe

$$\frac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-n_0} \cdot |a_{n_0}|$$

nach Satz 12.9 eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, so ist $|a_{n+1}| \geq |a_n| \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Mithin ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist wegen des Nullfolgekriteriums dann divergent. □

Korollar 12.24 (Praktikables Quotienten-/Wurzelkriterium)
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$.

a. *Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

b. *Falls $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ oder $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.*

c. *Im Fall* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ *oder* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ *wird keine Aussage getroffen!*

Beweis: Falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ bzw. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, so kann man Satz 12.22 bzw. Satz 12.23 mit

$$q := \frac{1 + \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}{2} \quad \text{bzw.} \quad q := \frac{1 + \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}{2}$$

anwenden.

Falls $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ bzw. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, so ist sicher $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ bzw. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ für n hinreichend groß, so daß die Aussage ebenfalls aus Satz 12.22 bzw. Satz 12.23 folgt. □

Bemerkung 12.25

Man beachte, daß die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergent ist, obwohl stets

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

gilt. Aber, es gibt kein $q < 1$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{1}{n+1} < q$$

für alle hinreichend großen n. Das Quotientenkriterium ist deshalb nicht anwendbar. Beachte auch, daß in diesem Fall

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

gilt.

Beispiel 12.26

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ ist absolut konvergent, da

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}}\right| = \frac{(n+1)^2\cdot n!}{n^2\cdot(n+1)!} = \frac{n+1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0 + 0 = 0.$$

Satz 12.27 (Cauchy-Produkt)

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *zwei absolut konvergente Reihen in* $\mathbb{K}$. *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *setzen wir*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Beweis: Wir konstruieren zunächst eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, indem wir die Elemente in $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ in der in Abbildung 1 angegebenen Weise durchlaufen.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
(0,4) & \longrightarrow & (1,4) & \longrightarrow & (2,4) & \longrightarrow & (3,4) & \longrightarrow & (4,4) & & \ldots \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow & & \\
(0,3) & \longleftarrow & (1,3) & \longleftarrow & (2,3) & \longleftarrow & (3,3) & & (4,3) & & \ldots \\
 & & & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\
(0,2) & \longrightarrow & (1,2) & \longrightarrow & (2,2) & & (3,2) & & (4,2) & & \ldots \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
(0,1) & \longleftarrow & (1,1) & & (2,1) & & (3,1) & & (4,1) & & \ldots \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
(0,0) & \longrightarrow & (1,0) & & (2,0) & \longrightarrow & (3,0) & & (4,0) & \longrightarrow & \ldots
\end{array}
$$

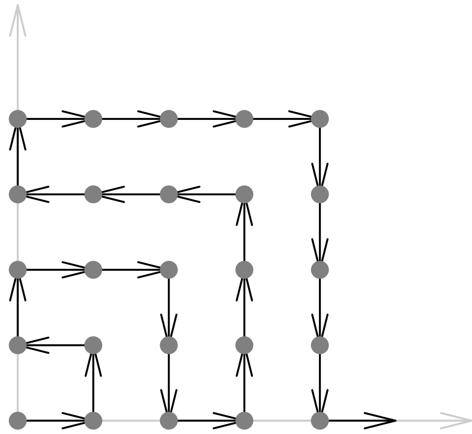


Abbildung 1. Die Bijektion $\sigma : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Aufgrund der Definition von σ gilt für $m \in \mathbb{N}_0$ offenbar

$$\big\{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma((m+1)^2 - 1)\big\} = \big\{(k,l) \mid 0 \le k, l \le m\big\} \tag{17}$$

Dann definieren wir uns eine Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$d_n := a_k \cdot b_l, \qquad \text{wenn } (k,l) = \sigma(n).$$

Wir wollen nun zunächst zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=0}^\infty d_n$ absolut konvergent ist. Dazu beachten wir, daß für $m \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{m} |d_n| \le \sum_{n=0}^{(m+1)^2-1} |d_n| \overset{(17)}{=} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} |a_k \cdot b_l| = \sum_{k=0}^{m} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{m} |b_l| \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|$$

erfüllt ist. Mithin ist die Folge der Partialsummen von $\sum_{n=0}^\infty |d_n|$ nach oben beschränkt. Damit ist $\sum_{n=0}^\infty d_n$ absolut konvergent und deshalb auch konvergent.

Zudem folgt aus den Grenzwertsätzen

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_i \longleftarrow \sum_{i=0}^{(n+1)^2-1} d_i \overset{(17)}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k \cdot b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \sum_{l=0}^{n} b_l \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l,$$

und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes gilt dann zudem

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Diese absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^\infty d_n$ werden wir nun umordnen. Dazu konstruieren wir uns nach dem Cantorschen Diagonalverfahren eine weitere bijektive Abbildung $\pi : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wie in Abbildung 2 angedeutet.

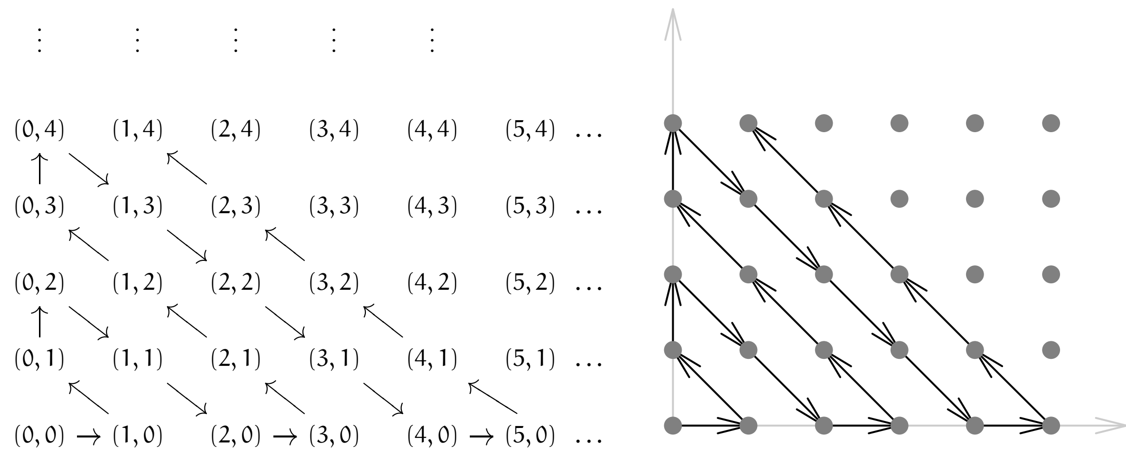


Abbildung 2. Die Bijektion $\pi : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Wir setzen nun

$$e_n := d_{\sigma^{-1}(\pi(n))} = a_k \cdot b_l, \quad \text{wenn } \pi(n) = (k, l)$$

für $n \in \mathbb{N}_0$ und erhalten so eine Umordnung $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (d_{\sigma^{-1}(\pi(n))})_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Folge $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$. Wegen des Umordnungssatzes 12.18 ist dann auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n.$$

Nun entsteht die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ offenbar aus der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ durch Einfügen von Klammern[2] im Sinne von Lemma 12.12. Mithin ist die Reihe nach eben diesem Lemma ebenfalls konvergent mit dem gleichen Grenzwert, d.h.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} e_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung erhalten wir für $m \in \mathbb{N}_0$ zudem

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| = \sum_{n=0}^{m} \left| \sum_{k+l=m} a_k \cdot b_l \right| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{k+l=m} |a_k \cdot b_l| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{m} |b_l| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \sum_{l=0}^{\infty} |b_l|,$$

[2]Wir wollen dies in der Fußnote etwas ausführen. Aufgrund der Definition von π und unter Verwendung der Formel in Beispiel 7.11 zur Berechnung der Summe der ersten n Zahlen sieht man, daß für $n \in \mathbb{N}_0$ folgende Gleichheit gilt

$$\{(k, l) \mid k + l = n\} = \left\{\pi(i) \;\middle|\; \frac{n \cdot (n+1)}{2} \leq i \leq \frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2} - 1\right\}. \tag{18}$$

Für c_n ergibt sich daraus

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k \cdot b_l = \sum_{i=\frac{n\cdot(n+1)}{2}}^{\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}-1} e_i = e_{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} + e_{\frac{n\cdot(n+1)}{2}+1} + \ldots + e_{\frac{(n+2)\cdot(n+1)}{2}-1},$$

d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ entsteht aus $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ durch Zusammenfassung von Summanden mittels Einfügen von Klammern.

so daß auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ beschränkt und monoton wachsend, also konvergent ist, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist absolut konvergent. $\square$

E) Potenzreihen

Definition 12.28

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$, $a \in \mathbb{K}$ und t eine Veränderliche.
Wir nennen einen Ausdruck der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$ eine *Potenzreihe* über $\mathbb{K}$ in der Veränderlichen t mit *Entwicklungspunkt* a. Im folgenden beschränken wir uns im wesentlichen auf den Fall $a = 0$ und schreiben dann einfach $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$.

Unser Ziel ist es, für die Veränderliche t Werte $x \in \mathbb{K}$ einzusetzen und so eine Reihe zu erhalten, die konvergiert oder auch nicht.

Lemma 12.29

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $y \in \mathbb{K}$, so daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ konvergiert. Dann ist die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

Beweis: Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ konvergent ist, ist die Folge $(a_n \cdot y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach dem Nullfolgekriterium eine Nullfolge, und mithin ist sie auch beschränkt. D.h. es gibt ein $s > 0$ mit

$$|a_n \cdot y^n| \leq s$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$ setzen wir $q := \frac{|x|}{|y|} < 1$ und erhalten dann

$$|a_n \cdot x^n| = |a_n \cdot y^n| \cdot \frac{|x|^n}{|y|^n} \leq s \cdot q^n.$$

Also ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s \cdot q^n = s \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, so daß diese nach dem Majorantenkriterium absolut konvergiert. $\square$

Notation 12.30

Wir wollen den Begriff des Supremums etwas erweitern, indem wir $\sup(\emptyset) := -\infty$ setzen und $\sup(A) := \infty$, falls $A \subseteq \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist. Damit gilt für jede Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\sup(A) \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

Wir erinnern uns, daß wir in Bemerkung 11.35 für $x \in \mathbb{R}$ bereits die Konvention $\frac{x}{\infty} := \frac{x}{-\infty} := 0$ eingeführt haben. Wir vereinbaren nun zudem $\frac{x}{0} := \infty$ für $x > 0$ sowie $\frac{x}{0} := -\infty$ für $x < 0$.

Definition 12.31

Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ über $\mathbb{K}$ nennen wir

$$r := \sup \left\{ |y| \;\middle|\; y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ ist konvergent} \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

den *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Man beachte, daß die Potenzreihe zumindest für $y = 0$ konvergiert, so daß die angegebene Menge nicht-leer ist!

Satz 12.32 (Konvergenzradius)
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ *eine Potenzreihe über* $\mathbb{K}$ *mit Konvergenzradius* r.

a. *Ist* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $|x| < r$, *so ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *absolut konvergent.*

b. *Ist* $x \in \mathbb{K}$ *mit* $|x| > r$, *so ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *divergent.*

Setzen wir $U_r(0) := \big\{x \in \mathbb{K} \;\big|\; |x| < r\big\}$, *so definiert die Potenzreihe also eine Abbildung*

$$U_r(0) \longrightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n.$$

Wir nennen $U_r(0)$ *den* Konvergenzbereich *der Potenzreihe.*

Bemerkung 12.33

a. Über den Fall $|x| = r$ wird in Satz 12.32 keine Aussage getroffen! Wir nennen die Menge $\big\{x \;\big|\; |x| = r\big\}$ den *Rand* des Konvergenzbereiches.

b. Konvergenzradius $r = \infty$ heißt, daß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ für alle $x \in \mathbb{K}$ absolut konvergent ist.

c. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist die Menge $U_r(0) = (-r, r)$ ein offenes Intervall; ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist die Menge $U_r(0)$ ein Kreis mit Radius r um den Ursprung. In Abbildung 3 stellen wir den Konvergenzbereich der Reihe graphisch dar.

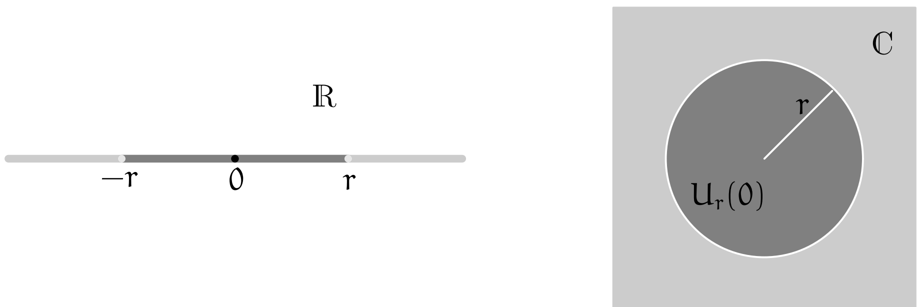


Abbildung 3. Konvergenzbereich $U_r(0)$

Beweis von Satz 12.32: a. Wir betrachten die Menge

$$A := \left\{ |y| \;\middle|\; y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ ist konvergent} \right\},$$

so daß $r = \sup(A)$. Ist $r = \infty$, so ist A unbeschränkt und zu jedem $x \in \mathbb{K}$ gibt es ein $y \in A$ mit $|y| > |x|$. Ist $|x| < r < \infty$, so ist $\varepsilon := \frac{r-|x|}{2} > 0$ und $r - \varepsilon = \sup(A) - \varepsilon$ ist keine obere Schranke von A. Es gibt also ein $y \in A$ mit $|y| > r - \varepsilon = \frac{r+|x|}{2} > |x|$. In beiden Fällen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ ist konvergent und $|x| < |y|$, und nach Lemma 12.29 ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ mithin absolut konvergent.

b. Ist $|x| > r$, so ist $|x| \notin A$ und mithin muß $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ divergent sein.

$\square$

Satz 12.34 (Cauchy-Hadamard)
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ *eine Potenzreihe über* $\mathbb{K}$.

a. *Falls der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ *existiert, so ist der Konvergenzradius von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ *gegeben durch*

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

b. *Falls der eigentliche oder uneigentliche Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ *existiert, so ist der Konvergenzradius von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ *gegeben durch*

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Beweis:

a. Es sei $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ und $x \in \mathbb{K}$. Ist $|x| < r$, so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ nach dem Quotientenkriterium in Korollar 12.24 absolut konvergent, da

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1} \cdot x^{n+1}}{a_n \cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| < 1.$$

Analog ist die Reihe divergent, wenn $|x| > r$.

b. Der Beweis geht analog zu a., wobei wir das Quotientenkriterium in Korollar 12.24 durch das dortige Wurzelkriterium ersetzen.

$\square$

Beispiel 12.35

a. Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ hat den Konvergenzradius $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1$. Damit wissen wir, daß die Reihe absolut konvergiert für $|x| < 1$ und daß sie divergiert für $|x| > 1$. Wir haben aber in Beispiel 11.31 schon gesehen, daß sie zudem auch für alle $|x| = 1$ divergiert, d.h. sie divergiert für alle Punkte im Rand des Konvergenzbereiches.

b. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ hat ebenfalls den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} = 1.$$

Aber für $x = -1$ erhalten wir die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, die konvergiert, so daß die Potenzreihe nicht für alle x im Rand des Konvergenzbereiches divergiert.

Satz 12.36 (Exponentialfunktion)
Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ *über* $\mathbb{K}$ *hat Konvergenzradius* $r = \infty$.

Die dadurch definierte Abbildung

$$\exp : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

nennen wir die Exponentialfunktion. *Sie genügt der* Funktionalgleichung

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

für $x, y \in \mathbb{K}$.

Beweis: Der Konvergenzradius ergibt sich als

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Zudem folgt aus dem Cauchy-Produkt für Reihen 12.27 und dem Binomischen Lehrsatz 7.15

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \\
&\overset{12.27}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \\
&\overset{7.15}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \exp(x + y).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 12.37
Nach Aufgabe 11.38 gilt $\exp(1) = e$ und mit Induktion folgt aus der Funktionalgleichung leicht, daß $\exp(n) = e^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $\exp(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$ für $n \geq 2$. Wir setzen für $x \in \mathbb{K}$ deshalb allgemein

$$e^x := \exp(x),$$

so daß die neue Notation mit der üblichen Potenzschreibweise und mit der Notation in Satz 9.8 übereinstimmt, und das Potenzgesetz $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ gilt.

Satz 12.38 (Sinus und Cosinus)

a. *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ *über* $\mathbb{K}$ *hat Konvergenzradius* $r = \infty$.
Die dadurch definierte Abbildung

$$\cos : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

nennen wir den Cosinus*.*

b. *Die Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *über* $\mathbb{K}$ *hat Konvergenzradius* $r = \infty$*. Die dadurch definierte Abbildung*

$$\sin : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

nennen wir den Sinus*.*

c. *Für* $x \in \mathbb{K}$ *gelten*

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

und

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

Wir nennen den Sinus eine ungerade *Funktion und den Cosinus eine* gerade*.*

d. *Für* $x \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$e^{i\cdot x} = \exp(i \cdot x) = \cos(x) + i \cdot \sin(x).$$

e. *Für* $x \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1.$$

f. *Für* $x \in \mathbb{K}$ *gilt*

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

und

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right).$$

g. *Für zwei reelle Zahlen* $x, y \in \mathbb{R}$ *gelten die* Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

und

$$\sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y).$$

h. *Für eine reelle Zahl* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $|e^{ix}| = 1$*.*

Beweis:

a. Ist $x \in \mathbb{K}$, so setzen wir

$$a_n := \begin{cases} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m}}{(2m)!}, & \text{falls } n = 2m \text{ gerade },\\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $|a_n| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right|$. Mithin ist $\exp(x)$ eine konvergente Majorante von $\cos(x)$, und $\cos(x)$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{K}$. Insbesondere ist der Konvergenzradius also

$$r = \sup\left\{|x| \;\middle|\; x \in \mathbb{K}\right\} = \sup(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \infty.$$

b. Ist $x \in \mathbb{K}$, so setzen wir

$$a_n := \begin{cases} (-1)^m \cdot \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}, & \text{falls } n = 2m+1 \text{ ungerade },\\ 0, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Dann ist $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $|a_n| \leq \left|\frac{x^n}{n!}\right|$. Mithin ist $\exp(x)$ eine konvergente Majorante von $\sin(x)$, und $\sin(x)$ ist absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{K}$. Insbesondere ist der Konvergenzradius also

$$r = \sup\left\{|x| \;\middle|\; x \in \mathbb{K}\right\} = \sup(\mathbb{R}_{\geq 0}) = \infty.$$

c. Für $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$\sin(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)\cdot(x^{2n+1})}{(2n+1)!} = -\sin(x)$$

und

$$\cos(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x).$$

d. Wir beachten, daß für die imaginäre Einheit i stets $i^{2n} = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = (-1)^n \cdot i$ gilt. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(x) + i \cdot \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i \cdot x)^n}{n!} = \exp(i \cdot x) \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der Grenzwertsätze für konvergente Reihen 12.4 und des Umordnungssatzes für absolut konvergente Reihen 12.18.

e. Für $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \cos(x)^2 + \sin(x)^2 &= \big(\cos(x) + i \cdot \sin(x)\big) \cdot \big(\cos(x) - i \cdot \sin(x)\big) \\ &\overset{\text{c.}}{=} \big(\cos(x) + i \cdot \sin(x)\big) \cdot \big(\cos(-x) + i \cdot \sin(-x)\big) \\ &\overset{\text{d.}}{=} \exp(ix) \cdot \exp(-ix) \\ &\overset{12.36}{=} \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1. \end{aligned}$$

f. Für $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$e^{ix} + e^{-ix} \overset{\text{d.}}{=} \cos(x) + i \cdot \sin(x) + \cos(-x) + i \cdot \sin(-x) \overset{\text{c.}}{=} 2 \cdot \cos(x)$$

und

$$e^{ix} - e^{-ix} \overset{\text{d.}}{=} \cos(x) + i \cdot \sin(x) - \cos(-x) - i \cdot \sin(-x) \overset{\text{c.}}{=} 2 \cdot i \cdot \sin(x).$$

g. Werten wir den Sinus oder den Cosinus an einer reellen Zahl aus, so erhalten wir eine reelle Zahl. Für $x, y \in \mathbb{R}$ betrachten wir nun die komplexe Zahl

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y) &\overset{\text{d.}}{=} \exp(i \cdot (x+y)) \overset{12.36}{=} \exp(ix) \cdot \exp(iy) \\ &\overset{\text{d.}}{=} \big(\cos(x) + i \cdot \sin(x)\big) \cdot \big(\cos(y) + i \cdot \sin(y)\big) \\ &= \big(\cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)\big) \\ &\qquad + i \cdot \big(\cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y)\big).\end{aligned}$$

Durch einen Vergleich des Realteils bzw. des Imaginärteils der beiden Seiten der Gleichung, erhalten wir die gewünschten Formeln.

h. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\exp(ix)| = |\cos(x) + i\sin(x)| = \sqrt{\cos(x)^2 + \sin(x)^2} = 1$.

□

Bemerkung 12.39
Die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$$

und

$$\sin(x+y) = \cos(x) \cdot \sin(y) + \sin(x) \cdot \cos(y).$$

gelten in der Tat nicht nur für reelle Zahlen x und y, sondern auch für beliebige komplexe Zahlen $x, y \in \mathbb{C}$. Allerdings funktioniert dann der oben geführte Beweis nicht, da dann die Aufteilung in den Real- und Imaginärteil in der angegebenen Form nicht möglich ist. Stattdessen kann man die Formeln direkt aus der Definition von Sinus und Cosinus mittels Potenzreihen herleiten. Das zu tun, überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Bemerkung 12.40 (Potenzreihen mit beliebigem Entwicklungspunkt a)
Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (t-a)^n$ über $\mathbb{K}$ mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{K}$ ist der Konvergenzradius immer noch definiert als

$$r := \sup\left\{ |y| \;\middle|\; y \in \mathbb{K}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \text{ ist konvergent} \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\},$$

und wir erhalten dann aus Satz 12.32

- $\forall\, x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| < r$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ absolut konvergent,
- $\forall\, x \in \mathbb{K}$ mit $|x-a| > r$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-a)^n$ divergent,

und Satz 12.34 impliziert, daß sich der Konvergenzradius ggf. berechnen läßt als

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

bzw. als

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Aufgaben

Aufgabe 12.41
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Die Berechnung der Grenzwerte im Falle der Konvergenz ist nicht erforderlich.

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^4}{100n^4}$.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$.

c. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(-3)^{n+1}}$.

Aufgabe 12.42
Es sei $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$.

a. Berechnen Sie das Cauchy-Produkt $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$.

b. Berechnen Sie den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$.

Aufgabe 12.43
Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$ Potenzreihen in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a. Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ für ein $y \in \mathbb{K}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ absolut für alle $x \in \mathbb{K}$ mit $|x| < |y|$.

b. Die gegebenen Potenzreihen haben denselben Konvergenzradius.

c. Konvergieren die Potenzreihen vielleicht sogar stets für dieselben $x \in \mathbb{K}$?

HINWEIS: Schauen Sie sich hilfestellend den Beweis von Lemma 12.29 an und verwendet Aufgabe 12.42.

Aufgabe 12.44 (Dezimalzahldarstellung)
Wir sind es gewohnt, reelle Zahlen als „Dezimalzahlen mit eventuell unendlich vielen Nachkommastellen", wie z.B. $3,1415926\ldots$, zu schreiben. Diese Aufgabe soll zeigen, warum das eigentlich möglich ist und welche Eigenschaften diese Dezimaldarstellung hat. Der Einfachheit halber bechränken wir uns dabei auf positive Zahlen ohne Stellen vor dem Komma.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $a_n, b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a. Die Reihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$$
ist konvergent und stellt somit eine reelle Zahl dar. Man schreibt diese Zahl dann in Dezimaldarstellung durch Hintereinanderschreiben der Ziffern als $0, a_1a_2a_3\ldots$.

b. Jede reelle Zahl im Intervall $[0, 1)$ besitzt eine Dezimaldarstellung wie in Aufgabenteil a..

c. Ist $N \geq 2$ eine feste natürliche Zahl mit $a_j = b_j$ für $1 \leq j \leq N-1$, $a_N < b_N$ und $0, a_1a_2a_3\ldots = 0, b_1b_2b_3\ldots$, so gilt $a_N + 1 = b_N$ und $a_j = 9$, $b_j = 0$ für alle $j > N$.

Aufgabe 12.45

Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

a. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k \cdot t^n$ für $k \in \mathbb{N}$.

b. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n} \cdot t^n$.

Aufgabe 12.46

Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{K}$ die Gleichung $\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$.

Aufgabe 12.47

Zeigen Sie, daß die beiden Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n!}$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$$

absolut konvergent sind und berechne ihren Grenzwert.

Aufgabe 12.48

Für $x \in \mathbb{R}$ mit $e^{ix} \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k \cdot x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot x\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

§ 13 Grenzwerte von Funktionen

Wir werden uns in den folgenden Paragraphen im wesentlichen dem Studium von Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

widmen und nennen diese eher *Funktionen* als Abbildungen. Wir könnten dabei viele Begriffe auch gleich wieder für den Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ statt $\mathbb{R}$ einführen und untersuchen, wollen dies aber zurück stellen, um näher an dem Vorwissen aus der Schulzeit zu bleiben.

A) Häufungspunkte von Teilmengen von $\mathbb{R}$

Definition 13.1 (Häufungspunkte)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir nennen a einen *Häufungspunkt* von U, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x \in U \setminus \{a\} \; : \; 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

Man beachte, dass a kein Element von U sein muß.

Bemerkung 13.2 (ε-Umgebung)
Für $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ nennen wir das Intervall

$$U_\varepsilon(a) := (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

die ε-*Umgebung* von a.

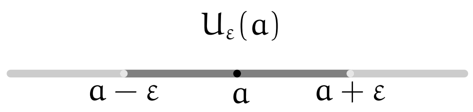


Abbildung 4. Die ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ von a.

Mit dieser Sprechweise gilt also:

> Genau dann ist a ein Häufungspunkt von U, wenn jede ε-Umgebung von a einen von a verschiedenen Punkt aus U enthält.

Beispiel 13.3
Jede reelle Zahl ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.

Dazu seien $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wenden Satz 9.6 an und finden eine rationale Zahl x im Intervall $(a, a + \varepsilon)$, d.h. $|x - a| < \varepsilon$ und $x \neq a$.

Proposition 13.4 (Folgenkriterium für Häufungspunkte)
Ein $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt von $U \subseteq \mathbb{R}$, wenn es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U \setminus \{a\}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ gibt, d.h. a ist Grenzwert einer Folge in $U \setminus \{a\}$.

Beweis: Ist a ein Häufungspunkt von U und $n \in \mathbb{N}$, so gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ ein $x \in U$ mit $0 < |x - a| < \varepsilon = \frac{1}{n}$. Wir wählen a_n als dieses x. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offenbar gegen a nach dem Einschließungssatz, da

$$0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Gibt es umgekehrt eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $0 < |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Setzen wir nun $x = a_{n_\varepsilon} \in U$, so folgt $0 < |x - a| < \varepsilon$ und somit ist a ein Häufungspunkt von U. □

Das folgende Beispiel zeigt, welche Art von Häufungspunkten einer Menge U, die nicht bereits in U liegen, wir typischerweise erwarten.

Beispiel 13.5
Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so enthält $[a, b]$ genau die Häufungspunkte von (a, b), d.h. zu den Punkten im Intervall kommen noch die Randpunkte hinzu.

Die analogen Aussagen für halboffene, abgeschlossene und uneigentliche Intervalle gelten ebenfalls und mit analogem Beweis.

Beweis: Ist $c \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von (a, b), so gibt es nach dem Folgenkriterium 13.4 eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(a, b) \subset [a, b]$, die gegen c konvergiert, und nach Satz 11.28 ist dann $c \in [a, b]$.
Ist $a \leq c < b$, so gilt für $n \geq 1$

$$(a, b) \ni c + \frac{b - c}{2 \cdot n} \longrightarrow c,$$

also ist c ein Häufungspunkt von (a, b). Analog gilt $(a, b) \ni b - \frac{b-a}{2\cdot n} \longrightarrow b$, so dass auch b ein Häufungspunkt von (a, b) ist. □

B) Grenzwerte von Funktionen

Definition 13.6 (ε-δ-Kriterium für Grenzwerte von Funktionen)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein Häufungspunkt von U.

Wir nennen $y \in \mathbb{R}$ den *Grenzwert* von f in a, falls

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0\ :\ \forall\ x \in U \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{x\to a} f(x) = y$$

oder "$f(x) \longrightarrow y$ für $x \to a$" und sagen, $f(x)$ *konvergiert* gegen y für x gegen a.

Proposition 13.7 (Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine Funktion und* a *ein Häufungspunkt von* U.

Dann sind die beiden folgenden Aussagen gleichwertig:

a. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$.

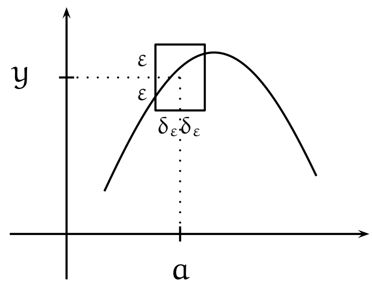


ABBILDUNG 5. ε-δ-Kriterium für Grenzwerte

b. $\forall\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $a_n \in U \setminus \{a\}$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = y$.

Beweis: **a. $\Longrightarrow$ b.:** Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $U \setminus \{a\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Wir müssen $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = y$ zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Wegen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = y$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass aus $x \in U$ mit $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ auch $|f(x) - y| < \varepsilon$ folgt.

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es zu δ_ε nun ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_\varepsilon$ auch $|a_n - a| < \delta_\varepsilon$ gilt.

Sei nun $n \geq n_\varepsilon$ dann erfüllt $a_n \in U$ die Bedingung $0 < |a_n - a| < \delta_\varepsilon$ und somit ist auch $|f(a_n) - y| < \varepsilon$. Damit ist $f(a_n) \longrightarrow y$ gezeigt.

b. $\Longrightarrow$ a.: Wir nehmen an, y wäre nicht der Grenzwert von f in a. Dann gilt:

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;:\; \forall\, \delta_\varepsilon > 0\; \exists\, x_{\delta_\varepsilon} \in U \;\text{ mit }\; 0 < |x_{\delta_\varepsilon} - a| < \delta_\varepsilon, \;\text{ aber } |f(x_{\delta_\varepsilon}) - y| \geq \varepsilon.$$

Für $n \geq 1$ und $\delta_\varepsilon = \frac{1}{n}$ setzen wir $a_n := x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}} \in U \setminus \{a\}$. Dann gilt

$$0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

so daß $a_n \longrightarrow a$, und zugleich gilt

$$|f(a_n) - y| \geq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $f(a_n)$ gegen y konvergieren muss.

$\square$

Beispiel 13.8

a. Betrachte $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ und $a = 3$. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \longrightarrow 3$ gilt dann wegen der Grenzwertsätze für Folgen 11.15

$$f(a_n) = a_n^2 = a_n \cdot a_n \longrightarrow 3 \cdot 3 = 9.$$

Mithin ist 9 der Grenzwert von f in 3, d.h.

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9 = f(3).$$

b. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

und $a = 0$. Ist nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n \longrightarrow 0$ und $a_n \neq 0$, dann gilt

$$f(a_n) = 1 \longrightarrow 1.$$

Mithin ist 1 der Grenzwert von f in 0, d.h.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0).$$

c. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$

und $a = 1$. Da es in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ offenbar eine Folge gibt, die gegen 1 konvergiert, ist a ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $a_n \longrightarrow 1$, so gilt

$$f(a_n) = \frac{a_n^2-1}{a_n-1} = a_n + 1 \longrightarrow 2.$$

Mithin ist 2 der Grenzwert von f in 1, d.h.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

Man beachte, dass in diesem Fall $a = 1$ gar nicht im Definitionsbereich von f liegt.

d. Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

und $a = 0$. Dann gilt für $a_n := -\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ und $f(a_n) = 0 \longrightarrow 0$ sowie $b_n := \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ und $f(b_n) = 1 \longrightarrow 1$. Mithin existiert der Grenzwert von f in $a = 0$ nicht.

!!! Warnung !!!

Unsere Definition des Begriffes Grenzwert stimmt **nicht** mit der Definition in den Vorlesungsskripten von Andreas Gathmann oder Wolfram Decker überein! Wenn f im Punkt a definiert ist, muss bei uns **nicht** notwendig $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ gelten (siehe Beispiel 13.8 b.), was nach deren Definition gelten muss!

Definition 13.9

Für zwei Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sowie $c \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$c \cdot f : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c \cdot f(x),$$

$$f + g : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x),$$

$$f - g : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - g(x)$$

und

$$f \cdot g : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x).$$

Falls zudem $g(x) \neq 0$ für $x \in U \cap V$, so definieren wir

$$\frac{f}{g} : U \cap V \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Proposition 13.10 (Grenzwertsätze für Funktionen)
Es seien $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Funktionen,* a *ein Häufungspunkt von* U *und* $c \in \mathbb{R}$.

a. *Der Grenzwert von* f *in* a *ist eindeutig bestimmt, d.h. falls* $\lim_{x\to a} f(x) = y$ *und* $\lim_{x\to a} f(x) = z$, *so ist* $y = z$.
b. *Wenn* $\lim_{x\to a} f(x)$ *und* $\lim_{x\to a} g(x)$ *existieren, so gelten:*
   (i) $\lim_{x\to a}(c \cdot f)(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$.
   (ii) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.
   (iii) $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.
   (iv) $\lim_{x\to a}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.
c. *Falls zudem* $\lim_{x\to a} f(x) \neq 0$, *so ist* a *ein Häufungspunkt der Menge* $V = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ *und es gilt*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{\lim_{x\to a} f(x)}.$$

Beweis: a. Dies folgt aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen 13.7 und der Eindeutigkeit des Grenzwertes bei Folgen 11.8. Genauer, da a ein Häufungspunkt von U ist, gibt es nach Proposition 13.4 eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U \setminus \{a\}$ mit $a_n \longrightarrow a$, und mit den eben erwähnten Sätzen folgt dann

$$y = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = z.$$

b. Analog folgen die Aussagen aus dem Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen 13.7 und den Grenzwertsätzen für Folgen 11.15 unter Berücksichtigung von Proposition 13.4.

c. Nach Proposition 13.4 gibt es eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $U \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, und nach dem Folgenkriterium 13.7 gilt dann

$$f(a_n) \longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) =: y.$$

Wegen $y \neq 0$ gibt es wegen der Grenzwertsätze für Folgen 11.15 ein n_0, so dass $f(a_n) \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, so dass $(a_n)_{n\geq n_0}$ eine Folge in V ist mit $a_n \longrightarrow a$. Nach Proposition 13.4 ist dann a ein Häufungspunkt von V. Die Aussage zum Grenzwert folgt dann wieder aus den Grenzwertsätzen für Folgen 11.15 und dem Folgenkriterium 13.7.

$\square$

Definition 13.11
Ist t eine Veränderliche und sind $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so nennen wir einen Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot t + a_0$$

ein *Polynom* in der Veränderlichen t mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Ist $a_n \neq 0$, so heißt

$$\deg\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k\right) := n$$

der *Grad* des Polynoms, und wir setzen zudem $\deg(0) := -\infty$. Mit

$$\mathbb{R}[t] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

bezeichnen wir die Menge aller Polynome in der Veränderlichen t mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$, so dass der Grad eine Abbildung $\deg : \mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$ ist.

Für ein Polynom $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$ und ein $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$f(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k.$$

Sind $f, g \in \mathbb{R}[t]$ zwei Polynome, $g \neq 0$ nicht das Nullpolynom, so nennen wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$$

eine *Polynomfunktion* und die Funktion

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

nennen wir eine *rationale Funktion.*

Ist $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, so nennen wir eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = 0$ eine *Nullstelle* von h.

Bemerkung 13.12
Man zeigt in der Vorlesung Algebraische Strukturen, dass die Menge der *Nullstellen* von $0 \neq g \in \mathbb{R}[t]$ eine endliche Menge ist. Genauer zeigt man:

$$\left|\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}\right| \leq \deg(g) < \infty.$$

Beispiel 13.13

a. Ist $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$ ein Polynom und $a \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Dies folgt aus den Grenzwertsätzen für Funktionen 13.10, da offenbar $\lim_{x\to a} \mathrm{id}(x) = \lim_{x \to a} x = a$ und f sich als endliche Summe von Produkten dieser Funktion mit sich selbst und mit Konstanten schreiben lässt.

b. Für jede rationale Funktion

$$\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

und jedes $a \in \mathbb{R}$ mit $g(a) \neq 0$ folgt dann aus Teil a. und Satz 13.10 c., dass a ein Häufungspunkt von $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ ist und dass

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f}{g}(a).$$

C) Uneigentliche Grenzwerte

Definition 13.14 (Grenzwerte für $x \longrightarrow \pm\infty$)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$.

a. Wir nennen U *nach oben unbeschränkt* bzw. *nach unten unbeschränkt*, wenn die Menge $U \cap [0, \infty)$ bzw. $U \cap (-\infty, 0]$ nicht beschränkt ist.

b. Ist U nach oben unbeschränkt, so nennen wir y den *Grenzwert* von f in ∞, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, s_\varepsilon > 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } x > s_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y$.

c. Ist U nach unten unbeschränkt, so nennen wir y den *Grenzwert* von f in $-\infty$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, s_\varepsilon < 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } x < s_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y$.

Bemerkung 13.15 (Folgenkriterium und Grenzwertsätze für Grenzwerte in $\pm\infty$)
Das Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen gilt analog auch für die Grenzwerte in $\pm\infty$. D.h.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y \iff \forall\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in U \text{ und } a_n \to \infty \text{ gilt } f(a_n) \longrightarrow y$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y \iff \forall\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in U \text{ und } a_n \to -\infty \text{ gilt } f(a_n) \longrightarrow y.$$

Zudem gelten auch die Grenzwertsätze für Funktionen 13.10 für Grenzwerte in $\pm\infty$.

Definition 13.16 (Uneigentliche Grenzwerte)
Sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von U.

a. Wir nennen ∞ den *uneigentlichen Grenzwert* von f in a, wenn

$$\forall\, s > 0 \;\; \exists\, \delta_s > 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta_s \text{ gilt } f(x) > s.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

b. Wir nennen $-\infty$ den *uneigentlichen Grenzwert* von f in a, wenn

$$\forall\, s < 0 \;\; \exists\, \delta_s > 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } 0 < |x - a| < \delta_s \text{ gilt } f(x) < s.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

c. Ist U nach oben unbeschränkt, so nennen wir ∞ den *uneigentlichen Grenzwert* von f in ∞, wenn

$$\forall\, s > 0 \;\; \exists t > 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } x > t \text{ gilt } f(x) > s.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

d. Ist U nach oben unbeschränkt, so nennen wir $-\infty$ den *uneigentlichen Grenzwert* von f in ∞, wenn

$$\forall\, s < 0 \;\; \exists t > 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } x > t \text{ gilt } f(x) < s.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

e. Ist U nach unten unbeschränkt, so nennen wir ∞ den *uneigentlichen Grenzwert* von f in $-\infty$, wenn

$$\forall\, s > 0 \;\; \exists t < 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } x < t \text{ gilt } f(x) > s.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

f. Ist U nach unten unbeschränkt, so nennen wir $-\infty$ den *uneigentlichen Grenzwert* von f in $-\infty$, wenn

$$\forall\, s < 0 \;\; \exists t < 0 \; : \; \forall\, x \in U \text{ mit } x < t \text{ gilt } f(x) < s.$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Bemerkung 13.17 (Folgenkriterium und Grenzwertsätze für uneigentliche GWe)
Auch für uneigentliche Grenzwerte gelten naheliegende Folgenkriterien:

a. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \iff \forall\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U \setminus \{a\}$ und $a_n \to a$ gilt $f(a_n) \to \infty$.

b. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff \forall\, (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in U$ und $a_n \to \infty$ gilt $f(a_n) \to \infty$.

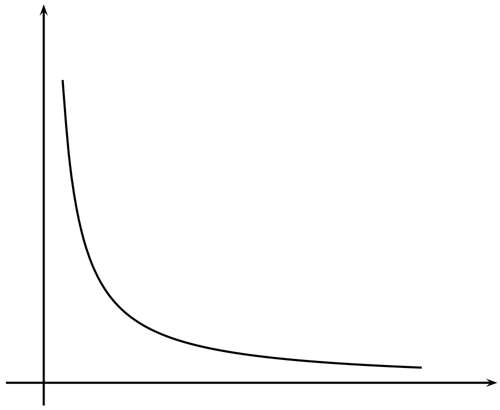
Die übrigen Fälle ergeben sich analog. Außerdem verallgemeinern sich auch die Grenzwertsätze für Funktionen 13.10 auf uneigentliche Grenzwerte in der naheliegenden Weise, wenn wir die Konventionen aus Bemerkung 11.35 berücksichtigen.

Beispiel 13.18
Für die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist 0 ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches, und es gilt

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty.$$

Zudem ist $(0, \infty)$ nach oben unbeschränkt und

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$



Beweis: Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(0,\infty)$ mit $a_n \longrightarrow 0$ ist und $s>0$, so gibt es ein $n_s \in \mathbb{N}$ mit $a_n < \frac{1}{s}$ für $n \geq n_s$. Damit gilt dann für $n \geq n_s$ aber auch

$$f(a_n) = \frac{1}{a_n} > s,$$

d.h. $f(a_n) \longrightarrow \infty$.

Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(0,\infty)$ mit $a_n \longrightarrow \infty$ ist und $\varepsilon > 0$, so gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq n_\varepsilon$. Damit gilt dann für $n \geq n_\varepsilon$ aber auch

$$|f(a_n) - 0| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon,$$

d.h. $f(a_n) \longrightarrow 0$. □

Beispiel 13.19

Es sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a_n > 0, \\ -\infty, & \text{falls } a_n < 0, \end{cases}$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } (a_n > 0 \text{ und } n \text{ gerade }) \text{ oder } (a_n < 0 \text{ und } n \text{ ungerade}), \\ -\infty, & \text{falls } (a_n < 0 \text{ und } n \text{ gerade }) \text{ oder } (a_n > 0 \text{ und } n \text{ ungerade}). \end{cases}$$

Wir beweisen die Aussage nur für $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $a_n > 0$, da der Rest sich analog zeigen lässt. Hierzu betrachten wir ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ mit

$$x \geq \max\left\{\frac{-2\cdot n\cdot a_0}{a_n}, \frac{-2\cdot n\cdot a_1}{a_n}, \ldots, \frac{-2\cdot n\cdot a_{n-1}}{a_n}, 1\right\}.$$

Dann gilt

$$\frac{a_n \cdot x^n}{2\cdot n} \geq -a_k \cdot x^k$$

für alle $0 \leq k \leq n-1$, und mithin

$$\frac{a_n\cdot x^n}{2} = n \cdot \frac{a_n \cdot x^n}{2\cdot n} \geq -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k$$

oder alternativ

$$f(x) = \frac{a_n \cdot x^n}{2} + \left(\frac{a_n \cdot x^n}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \right) \geq \frac{a_n \cdot x^n}{2}.$$

Da zudem offenbar $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{a_n \cdot x^n}{2} = \infty$, muss auch $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ gelten. □

Aufgaben

Aufgabe 13.20
Bestimmen Sie für die nachfolgenden Mengen jeweils die Menge aller ihrer Häufungspunkte:

a. $M_1 = \left\{ (-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^{n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \right\}$.

b. $M_2 = \mathbb{N}$.

Aufgabe 13.21
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}$.

b. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest vorgegeben sind.

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x} \right)$.

Aufgabe 13.22 (Cauchy-Kriterium für Grenzwerte)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ein Häugfungspunkt von U und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \; : \; \forall\, x, y \in \left(U \cap U_{\delta_\varepsilon}(a) \right) \setminus \{a\} \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

§ 14 Stetigkeit

Definition 14.1 (ε-δ-Kriterium für Stetigkeit)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$.

Wir nennen f *stetig in* a, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \;:\; \forall\, x \in U \text{ mit } |x - a| < \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Die Funktion f heißt *stetig* (auf U), wenn sie stetig in jedem Punkt in U ist.

$\mathcal{C}(U, \mathbb{R}) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ ist die Menge der auf U stetigen Funktionen.

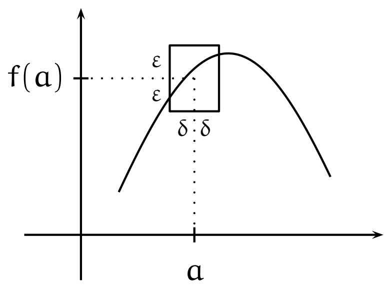


Abbildung 6. ε-δ-Kriterium für Stetigkeit

Bemerkung 14.2
Für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt a ist nur das Verhalten von f in einer kleinen ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a) = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ von a maßgeblich. Wir sagen deshalb auch, dass die Stetigkeit eine *lokale* Eigenschaft ist!

Lemma 14.3 (Stetigkeit in Häufungspunkten)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$*,* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $a \in U$ *ein Häufungspunkt.*

Genau dann ist f *stetig in* a*, wenn* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen 13.6 und 14.1. □

Beispiel 14.4 (Polynomfunktionen sind stetig.)

a. Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
   Denn nach Beispiel 13.13 gilt für $a \in \mathbb{R}$ auch $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

b. Jede rationale Funktion $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
   Denn nach Beispiel 13.13 ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches und $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{f}{g}(a)$.

c. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

   aus Beispiel 13.8 b. ist nicht stetig in 0, da $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$. Aber, f ist stetig in jedem $a \neq 0$, wie man leicht sieht.

d. Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $V \subseteq U$, so ist die Einschränkung $f_| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ von f auf V offenbar ebenfalls stetig.

e. Ist $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Funktion, so ist f stetig! (Kein nützliches Konzept!) Denn, ist $a \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta_\varepsilon := \frac{1}{2}$. Für $x \in \mathbb{Z}$ mit $|x - a| < \delta_\varepsilon = \frac{1}{2}$ muss dann $x = a$ gelten und somit auch $|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$.

Satz 14.5 (Folgenkriterium für Stetigkeit)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $a \in U$.

Genau dann ist f *stetig in* a, *wenn*

$$\forall\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n \in U \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a). \tag{19}$$

Beweis: Der Beweis geht genau wie der Beweis des Folgenkriteriums für Grenzwerte von Funktionen 13.7.

"$\Longrightarrow$": Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Wir müssen $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ zeigen. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben.
Da f stetig in a ist, gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß aus $x \in U$ mit $|x - a| < \delta_\varepsilon$ auch $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ folgt.
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es zu δ_ε nun ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ auch $|a_n - a| < \delta_\varepsilon$ gilt.
Sei nun $n \geq n_\varepsilon$ dann erfüllt $a_n \in U$ die Bedingung $|a_n - a| < \delta_\varepsilon$ und somit ist auch $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$. Damit ist $f(a_n) \longrightarrow f(a)$ gezeigt.

"$\Longleftarrow$": Wir nehmen an, f wäre nicht stetig in a. Dann gilt:

$$\exists\ \varepsilon > 0\ :\ \forall\ \delta_\varepsilon > 0\ \exists\ x_{\delta_\varepsilon} \in U \text{ mit } |x_{\delta_\varepsilon} - a| < \delta_\varepsilon, \text{ aber } |f(x_{\delta_\varepsilon}) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Für $n \geq 1$ und $\delta_\varepsilon = \frac{1}{n}$ setzen wir $a_n := x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}} \in U \setminus \{a\}$. Dann gilt

$$0 \leq |a_n - a| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0,$$

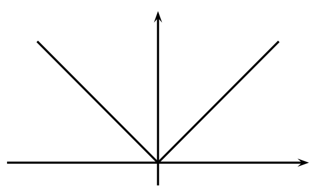
so dass $a_n \longrightarrow a$, und zugleich gilt

$$|f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $f(a_n)$ gegen $f(a)$ konvergieren muss.

$\square$

Beispiel 14.6 (Die Betragsfunktion ist stetig)
Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ ist stetig.



Denn für $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \longrightarrow a$ gilt aufgrund der Grenzwertsätze für Folgen 11.15 auch $|a_n| \longrightarrow |a|$.

Proposition 14.7 (Rechenregeln für stetige Funktionen)
Seien $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen, die in* $a \in U$ *stetig sind, und* $c \in \mathbb{R}$.

a. $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$ *und* $f \cdot g$ *sind stetig in* a.
b. *Ist* $g(a) \neq 0$, *so ist auch* $\frac{f}{g} : U \setminus \{x \in U \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig in* a.

Beweis: Der Beweis folgt aus dem Folgenkriterium für Stetigkeit 14.5 und den Grenzwertsätzen für Folgen 11.15.

Z.B. sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $a_n \longrightarrow a$, dann gilt

$$(f + g)(a_n) = f(a_n) + g(a_n) \longrightarrow f(a) + g(a) = (f + g)(a),$$

da f und g in a stetig sind. Also ist auch $f + g$ stetig in a. □

Proposition 14.8 (Komposition stetiger Funktionen)
Es seien $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $\mathrm{Im}(f) \subseteq V$ *und es sei* $a \in U$. *Ist* f *stetig in* a *und* g *stetig in* $f(a)$, *so ist* $g \circ f$ *stetig in* a.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $a_n \longrightarrow a$, dann ist $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V und, da f stetig in a ist, gilt zudem $f(a_n) \longrightarrow f(a)$. Nun ist auch g stetig in $f(a)$, so daß daraus

$$(g \circ f)(a_n) = g(f(a_n)) \longrightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

folgt. Aufgrund des Folgenkriteriums für Stetigkeit 14.5 ist dann $g \circ f$ stetig in a. □

Beispiel 14.9
Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in U$, so ist auch $|f| : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto |f(x)|$ als Komposition stetiger Funktionen stetig in a.

Definition 14.10 (Stetig fortsetzbar)
Es sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a \in \mathbb{R} \setminus U$ ein Häufungspunkt von U. Wir nennen f in a *stetig fortsetzbar*, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existiert.

In dieser Situation nennen wir

$$g : U \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq a, \\ \lim\limits_{z\to a} f(z), & \text{falls } x = a, \end{cases}$$

die *stetige Fortsetzung* von f, und g ist nach Lemma 14.3 stetig in a und damit stetig auf $U \cup \{a\}$.

Beispiel 14.11
a. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

aus Beispiel 13.8 c. ist in $a = 1$ stetig fortsetzbar, und die stetige Fortsetzung ist

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x + 1.$$

b. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 13.8 d. ist in $a = 0$ nicht stetig fortsetzbar, da der Grenzwert von f in 0 nicht existiert.

c. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 13.8 b. ist nach unserer Definition in $a = 0$ nicht stetig fortsetzbar, obwohl der Grenzwert von f in 0 existiert, da 0 bereits zum Definitionsbereich der Funktion gehört!

A) Wichtige Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 14.12 (Zwischenwertsatz)
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *nimmt jeden Wert zwischen* $f(a)$ *und* $f(b)$ *an.*

Beweis: Für den Beweis können wir $f(a) \leq f(b)$ annehmen. Für $c \in [f(a), f(b)]$ definieren wir eine Funktion

$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - c,$$

und diese ist aufgrund der Proposition 14.7 stetig auf $[a, b]$.

Wir müssen zeigen, dass g eine Nullstelle in $[a, b]$ besitzt.

Dazu wenden wir wie im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß 11.26 ein Intervallschachtelungsverfahren an. Wir setzen

$$[a_0, b_0] := [a, b]$$

und betrachten den Punkt

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \in [a, b].$$

Ist $g(x_0) = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls gilt entweder $g(x_0) > 0$ und wir setzen $[a_1, b_1] := [a_0, x_0]$, oder es gilt $g(x_0) < 0$ und wir setzen $[a_1, b_1] := [x_0, b_0]$.

Mit dem neuen Intervall verfahren wir wie mit dem vorherigen. Auf dem Weg finden wir entweder nach endlich vielen Schritten einen Punkt $x_n \in [a, b]$ mit $g(x_n) = 0$, oder wir konstruieren rekursiv eine monoton steigende, beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$ und eine monoton fallende, beschränkte $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \longrightarrow 0. \tag{20}$$

Aufgrund des Monotoniekriteriums für Folgen konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Wert x und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Wert y, und wegen (20) gilt dann

$$x = y.$$

Da das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, gilt zudem nach Satz 11.28

$$x \in [a, b].$$

Man beachte auch, daß aufgrund der Konstruktion von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stets

$$g(a_n) < 0 \quad \text{und} \quad g(b_n) > 0.$$

Für die stetige Funktion g folgt dann aus dem Folgenkriterium 14.5 und Satz 11.17

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g(a_n) \le 0 \le \lim_{n \to \infty} g(b_n) = g(x),$$

also $g(x) = 0$. □

Beispiel 14.13 (Nullstellen von Polynomfunktionen)
Ist $f \in \mathbb{R}[t]$ ein Polynom von ungeradem Grad, so besitzt f eine Nullstelle.

Denn nach Beispiel 13.19 gilt, dass $\lim_{x \to \infty} f(x)$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ verschiedene Vorzeichen haben, so dass es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ geben muss. Wenden wir dann den Zwischenwertsatz auf $f_{|[a,b]}$ bzw. $f_{|[b,a]}$ an, so folgt die Behauptung.

Definition 14.14 (Beschränkte Funktionen)
Eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn $\mathrm{Im}(f)$ beschränkt ist.

Proposition 14.15 (Beschränktheit stetiger Funktionen)
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist beschränkt.*

Beweis: Nehmen wir an, f wäre nicht beschränkt. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in [a, b]$ mit

$$|f(a_n)| > n.$$

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, da sie im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ liegt, und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 11.26 gibt es also eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert c, d.h.

$$a_{n_k} \longrightarrow c.$$

Da das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, gilt nach Satz 11.28

$$c \in [a, b].$$

Da f und somit nach Beispiel 14.9 auch $|f|$ stetig auf $[a, b]$ ist, folgt

$$|f(c)| \longleftarrow |f(a_{n_k})| \ge n_k \longrightarrow \infty,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist. □

Satz 14.16 (Maximum / Minimum stetiger Funktionen)
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. es gibt* $c, d \in [a, b]$*, so dass für alle* $x \in [a, b]$ *gilt*

$$f(c) \le f(x) \le f(d).$$

Beweis: Nach Proposition 14.15 ist die Menge

$$A := \mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

beschränkt und somit existiert

$$y := \sup(A) \in \mathbb{R}.$$

Da y die kleinste obere Schranke von A ist, gibt es für jedes $n \geq 1$ ein $a_n \in [a,b]$ mit

$$y - \frac{1}{n} < f(a_n) \leq y.$$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt, da sie im abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ liegt, also besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 11.26 eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert d. Dann gilt aber

$$y \longleftarrow y - \frac{1}{n_k} < f(a_{n_k}) \leq y \longrightarrow y,$$

so dass aufgrund des Einschachtelungssatzes 11.17 auch

$$f(a_{n_k}) \longrightarrow y$$

gilt. Da f aber stetig ist, folgt dann

$$f(d) = \lim_{k\to\infty} f(a_{n_k}) = y.$$

Die Existenz von c zeigt man analog mit Hilfe von $\inf(A)$. $\square$

Beispiel 14.17

a. Die Funktion $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist beschränkt, und es gilt $f(0) = 0$ ist das Minimum und $f(1) = f(-1) = 1$ ist das Maximum von $\mathrm{Im}(f)$.

b. Die Funktion $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht beschränkt und nimmt weder ihr Minimum noch ihr Maximum an.

B) Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen

Definition 14.18 (Monotone Funktionen)
Es sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a. f heißt *monoton wachsend*, wenn für $x, y \in U$ aus $x \leq y$ stets $f(x) \leq f(y)$ folgt.

b. f heißt *streng monoton wachsend*, wenn für $x, y \in U$ aus $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ folgt.

c. f heißt *monoton fallend*, wenn für $x, y \in U$ aus $x \leq y$ stets $f(x) \geq f(y)$ folgt.

d. f heißt *streng monoton fallend*, wenn für $x, y \in U$ aus $x < y$ stets $f(x) > f(y)$ folgt.

Beispiel 14.19

a. Die Funktion $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ ist für jedes $n \geq 1$ streng monoton wachsend, da nach Lemma 8.17 aus $0 \leq x < y$ stets $x^n < y^n$ folgt.

b. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 13.8 d. ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

Bemerkung 14.20
Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder fallend, so ist f injektiv.

Denn, für $x, y \in U$ mit $x \neq y$ gilt $x < y$ oder $x > y$ und somit $f(x) < f(y)$ oder $f(x) > f(y)$, aber in jedem Fall $f(x) \neq f(y)$.

Satz 14.21 (Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen)
Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *mit* $a < b$, $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei eine Funktion und es seien* $c := \inf(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *und* $d := \sup(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

a. *Ist* f *streng monoton wachsend und stetig, so gelten:*
   (i) $f : (a, b) \longrightarrow (c, d)$ *ist bijektiv.*
   (ii) $f^{-1} : (c, d) \longrightarrow (a, b)$ *ist streng monoton wachsend und stetig.*
b. *Ist* f *streng monoton fallend und stetig, so gelten:*
   (i) $f : (a, b) \longrightarrow (c, d)$ *ist bijektiv.*
   (ii) $f^{-1} : (c, d) \longrightarrow (a, b)$ *ist streng monoton fallend und stetig.*

Beweis: Wir beweisen nur den Fall, dass f streng monoton wachsend ist, da der Beweis für streng monoton fallende Funktionen analog geht.

Zeige: $c, d \notin \mathrm{Im}(f)$: Wäre $d \in \mathrm{Im}(f)$, so würde es ein $x \in (a, b)$ geben mit $f(x) = d$. Wegen $x < b$ gibt es ein $x' \in (a, b)$ mit $x < x'$ und somit

$$d = f(x) < f(x') \in \mathrm{Im}(f),$$

im Widerspruch dazu, dass d das Supremum von $\mathrm{Im}(f)$ ist. Analog sieht man, dass $c \notin \mathrm{Im}(f)$.

Zeige: $\mathrm{Im}(f) = (c, d)$: Nach Definition von $c = \inf(\mathrm{Im}(f))$ und $d = \sup(\mathrm{Im}(f))$ sowie nach der obigen Vorüberlegung folgt für $y \in \mathrm{Im}(f)$ sofort $c < y < d$, d.h.

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq (c, d).$$

Sei nun $y \in (c, d)$. Wegen $y > c = \inf(\mathrm{Im}(f))$ gibt es ein $x_1 \in (a, b)$ mit $y > f(x_1)$, und wegen $y < d = \sup(\mathrm{Im}(f))$ gibt es ein $x_2 \in (a, b)$ mit $y < f(x_2)$. Nach Voraussetzung ist die Einschränkung von f

$$f_| : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf das Intervall $[x_1, x_2]$ stetig als Einschränkung einer stetigen Funktion, und nach dem Zwischenwertsatz 14.12 gibt es wegen $f(x_1) < y < f(x_2)$ dann ein

$x \in [x_1, x_2] \subset (c, d)$ mit $y = f(x)$, d.h.

$$(c, d) \subseteq \mathrm{Im}(f).$$

Zeige: $f : (a, b) \longrightarrow (c, d)$ **ist bijektiv:** Nach Bemerkung 14.20 ist die streng monotone Funktion f injektiv, und wie eben gezeigt, ist f surjektiv auf (c, d).

Zeige: $f^{-1} : (c, d) \longrightarrow (a, b)$ **ist streng monoton wachsend:** Seien $y_1, y_2 \in (c, d)$ mit $y_1 < y_2$. Dann gibt es $x_1, x_2 \in (a, b)$ mit $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$, und da f streng monoton wachsend ist, muss notwendigerweise auch $x_1 < x_2$ gelten. Dann ist aber

$$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2),$$

und f^{-1} ist streng monoton wachsend.

Zeige: $f^{-1} : (c, d) \longrightarrow (a, b)$ **ist stetig:** Seien $y_0 \in (c, d)$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $x_0 := f^{-1}(y_0) \in (a, b)$ und

$$r_\varepsilon := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{b - x_0}{2}, \frac{x_0 - a}{2}\right\} > 0.$$

Damit gilt

$$a < x_0 - r_\varepsilon < x_0 < x_0 + r_\varepsilon < b$$

und somit

$$f(x_0 - r_\varepsilon) < y_0 < f(x_0 + r_\varepsilon),$$

da f streng monoton wachsend ist. Für

$$\delta_\varepsilon := \min\{y_0 - f(x_0 - r_\varepsilon), f(x_0 + r_\varepsilon) - y_0\} > 0$$

gilt dann offenbar

$$f(x_0 - r_\varepsilon) \leq y_0 - \delta_\varepsilon < y_0 < y_0 + \delta_\varepsilon \leq f(x_0 + r_\varepsilon),$$

und da f^{-1} streng monoton wachsend ist, folgt für $y \in (y_0 - \delta_\varepsilon, y_0 + \delta_\varepsilon) \subset (c, d)$ deshalb

$$x_0 - r_\varepsilon = f^{-1}(f(x_0 - r_\varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + r_\varepsilon)) = x_0 + r_\varepsilon$$

d.h.

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x_0 - f^{-1}(y)| < 2 \cdot r_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Also ist f^{-1} stetig in y_0, und damit stetig auf (c, d).

□

Bemerkung 14.22 (Umkehrsatz für streng monotone stetige Funktionen)
Ist die Abbildung $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ im Umkehrsatz 14.21 streng monoton wachsend, so ist

$$c = \inf(\mathrm{Im}(f)) = \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{und} \quad d = \sup(\mathrm{Im}(f)) = \lim_{x \to b} f(x),$$

und ist f streng monoton fallend, so ist

$$c = \inf(\mathrm{Im}(f)) = \lim_{x \to b} f(x) \quad \text{und} \quad d = \sup(\mathrm{Im}(f)) = \lim_{x \to a} f(x).$$

Außerdem, falls f stetig in $a \in \mathbb{R}$ bzw. in $b \in \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann, so ist $\lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$ bzw. $\lim\limits_{x\to b} f(x) \in \mathbb{R}$ und f^{-1} wird durch

$$f^{-1}\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) = a \quad \text{bzw.} \quad f^{-1}\left(\lim_{x\to b} f(x)\right) = b$$

stetig fortgesetzt. D.h. die Aussagen im Umkehrsatz 14.21 gelten für *halboffene* und *abgeschlossene* Intervalle entsprechend.

Beweis: Wir betrachten nur den Fall f streng monoton wachsend und

$$d := \sup(\mathrm{Im}(f)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

1. Fall: $d \in \mathbb{R}$**:** Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in \mathrm{Im}(f)$ mit $y > d - \varepsilon$ und es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y$.

Fall 1.1: $b \in \mathbb{R}$**:** Wir setzen nun $\delta_\varepsilon := b - x_0$ und erhalten für $x \in (a, b)$ mit $b - x = |x - b| < \delta_\varepsilon = b - x_0$ notwendigerweise $x_0 < x$ und somit auch $y = f(x_0) < f(x)$, d.h.

$$|f(x) - d| = d - f(x) < d - y < \varepsilon.$$

Fall 1.2: $b = \infty$**:** Wir setzen dann $t = \max\{x_0, 1\}$ und erhalten für $x > t$ dann auch $y = f(x_0) < f(x)$, d.h.

$$|f(x) - d| = d - f(x) < d - y < \varepsilon.$$

In beiden Fällen ist damit $\lim\limits_{x\to b} f(x) = d$ gezeigt.

2. Fall: $d = \infty$**:** Zu $s > 0$ gibt es dann ein $y \in \mathrm{Im}(f)$ mit $y > s$ und wieder gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = y$.

Fall 1.1: $b \in \mathbb{R}$**:** Wir setzen nun $\delta_\varepsilon := b - x_0$ und erhalten für $x \in (a, b)$ mit $b - x = |x - b| < \delta_\varepsilon = b - x_0$ notwendigerweise $x_0 < x$ und somit auch

$$f(x) > f(x_0) = y > s.$$

Fall 1.2: $b = \infty$**:** Wir setzen dann $t = \max\{x_0, 1\}$ und erhalten für $x > t$ dann auch

$$f(x) > f(x_0) = y > s.$$

In beiden Fällen ist damit wieder $\lim\limits_{x\to b} f(x) = d$ gezeigt.

Läßt sich nun zudem f in $b \in \mathbb{R}$ stetig fortsetzen, so heißt dies, dass der Grenzwert

$$d := \lim_{x\to b} f(x) \in \mathbb{R}$$

in $\mathbb{R}$ liegt. Da f^{-1} stetig und streng monton wachsend auf (c, d) ist, gilt zudem

$$b = \lim_{x\to d} f^{-1}(x),$$

und somit lässt sich f^{-1} in d durch $f^{-1}(d) = b$ stetig fortsetzen. $\square$

Beispiel 14.23 (Wurzelfunktion)
Für $n \geq 2$ ist die Funktion

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$$

nach Beispiel 14.19 streng monoton wachsend und nach Beispiel 14.4 stetig. Zudem gilt

$$\inf(\mathrm{Im}(f)) = 0 \quad \text{und} \quad \sup(\mathrm{Im}(f)) = \infty.$$

Nach dem Umkehrsatz 14.21 gibt es also eine Umkehrfunktion

$$\sqrt[n]{\cdot} : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

und diese ist streng monoton wachsend und stetig.

Dies ist unter anderem ein alternativer Beweis zu Satz 9.8 für die Existenz von n-ten Wurzeln!

Man beachte zudem, daß wegen Bemerkung 14.22

$$\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

gilt, so dass die Wurzelfunktion stetig nach 0 fortgesetzt werden kann:

$$\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto \sqrt[n]{x}.$$

Insbesondere ist auch die Funktion $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto \sqrt{x}$ stetig.

Korollar 14.24
$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Beweis: Wir müssen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n \geq 2}$ mit $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$ eine Nullfolge ist. Da die Funktion $\sqrt[n]{\cdot}$ streng monoton wachsend ist, folgt aus $n > 1$ auch $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n]{1} = 1$, und somit $a_n > 0$. Aus dem Binomischen Lehrsatz 7.15 folgt damit

$$n = (a_n + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a_n^k \cdot 1^{n-k} \geq 1 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot a_n^2 > 1,$$

oder alternativ

$$0 \longleftarrow \frac{2}{n} \geq a_n^2 > 0.$$

Der Einschachtelungssatz 11.17 bedingt dann, dass

$$a_n^2 \longrightarrow 0,$$

und da die Wurzelfunktion stetig in 0 ist, folgt damit

$$a_n = \sqrt{a_n^2} \longrightarrow \sqrt{0} = 0.$$

□

C) Gleichmäßige Stetigkeit

Bemerkung 14.25 (Stetigkeit auf U)
Wir erinnern uns, eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst *stetig auf* U, wenn sie in jedem Punkt $a \in U$ stetig ist, d.h.

$$\forall\, a \in U\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_{\varepsilon,a} > 0\ :\ \forall\, x \in U \text{ mit } |x - a| < \delta_{\varepsilon,a} \text{ gilt } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Wir schreiben diesmal $\delta_{\varepsilon,a}$ statt δ_ε, um zu verdeutlichen, dass wir bei gegebenem $\varepsilon > 0$ zwar in jedem Punkt a ein geeignetes δ finden müssen, dass dieses δ sich mit dem Punkt a aber ändern kann! Es hängt also vom Punkt a ab. In der nächsten Definition wollen wir einen stärkeren Begriff der Stetigkeit einführen, bei dem genau das nicht mehr der Fall ist.

Definition 14.26 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Eine Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig* auf U, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0\ :\ \forall\, x, y \in U \text{ mit } |x - y| < \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 14.27
Offenbar ist jede auf U gleichmäßig stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ auch stetig auf U.

Satz 14.28
Eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist gleichmäßig stetig auf* $[a, b]$.

Beweis: Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\exists\, \varepsilon > 0\ :\ \forall\, \delta_\varepsilon > 0\ :\ \exists\, x_{\delta_\varepsilon}, y_{\delta_\varepsilon} \in [a, b] \text{ mit } |x_{\delta_\varepsilon} - y_{\delta_\varepsilon}| < \delta_\varepsilon, \text{ aber } |f(x_{\delta_\varepsilon}) - f(y_{\delta_\varepsilon})| \geq \varepsilon.$$

Für $n \geq 1$ und $\delta_\varepsilon := \frac{1}{n}$ setzen wir $a_n := x_{\delta_\varepsilon} = x_{\frac{1}{n}}$ und $b_n := y_{\delta_\varepsilon} = y_{\frac{1}{n}}$. Damit erhalten wir zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ in $[a, b]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 11.26 besitzt $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und ebenso besitzt dann $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$. Nach Konstruktion gilt

$$0 \leq |a_{n_{k_l}} - b_{n_{k_l}}| \leq \frac{1}{n_{k_l}} \longrightarrow 0,$$

so dass die Grenzwerte von $(a_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ und $(b_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ wegen des Einschachtelungssatzes 11.17 übereinstimmen müssen, d.h.

$$a_{n_{k_l}} \longrightarrow y \quad \text{und} \quad b_{n_{k_l}} \longrightarrow y.$$

Da das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, gilt nach Satz 11.28 zudem

$$y \in [a, b].$$

Da f und die Betragsfunktion stetig sind, folgt damit

$$0 = |f(y) - f(y)| \longleftarrow |f(a_{n_{k_l}}) - f(b_{n_{k_l}})| \geq \varepsilon,$$

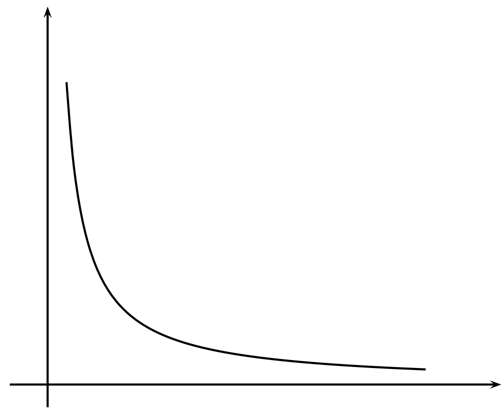
was ein offensichtlicher Widerspruch ist. □

Beispiel 14.29

a. Die Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$ ist gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$.
Dies folgt aus Satz 14.28. Will man es aus der Definition selbst herleiten, so kann man $\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{2}$ zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wählen, denn aus $|x-y| < \delta_\varepsilon$ folgt dann

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq |x - y| \cdot 2 < 2 \cdot \delta_\varepsilon = \varepsilon.$$

b. Die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.



Dazu setzen wir $\varepsilon := 1$ und wählen $\delta > 0$ beliebig. Dann setzen wir $x := \delta$ und $y := \frac{\delta}{1+\delta}$, also $x, y \in (0, \infty)$ mit

$$|x - y| = \delta - \frac{\delta}{1 + \delta} < \delta,$$

aber

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{1 + \delta}{\delta} \right| = 1 \geq \varepsilon.$$

Also ist f nicht gleichmäßig stetig auf $(0, \infty)$.
Das Problem liegt darin, dass bei fest vorgegebenem $\varepsilon > 0$ das $\delta_{\varepsilon,a}$, das man für die Stetigkeit in a wählen muss, immer kleiner werden muss, je näher a an 0 liegt, da die Steigung des Graphen von f nahe bei Null immer steiler wird.

Aufgaben

Aufgabe 14.30
Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a \in U$ und $b \in \mathbb{R}$.

a. Zeigen Sie, ist $f(a) > b$, so gibt, es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) > b$ für alle $x \in U \cap (a - \delta, a + \delta)$.

b. Zeigen Sie, ist $f(a) \neq b$, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq b$ für alle $x \in U \cap (a - \delta, a + \delta)$.

Aufgabe 14.31
Die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

Aufgabe 14.32
Verwenden Sei die ϵ-δ-Definition der Stetigkeit, um zu zeigen, dass die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sqrt{1-x^3}$ stetig in $[0,1]$ ist.

Aufgabe 14.33 (Lipschitz-Stetigkeit)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $L \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, wenn $|f(x)-f(y)| \leq L \cdot |x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, so ist f stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 14.34
Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{2^n}{n!} & \text{für } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \backslash \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\} \end{cases}.$$

Bestimme (mit Beweis) sämtliche Punkte auf $[0,1]$, in denen f stetig ist.

Aufgabe 14.35
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \neq b$. Zeigen Sie, es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq b$ für alle $x \in (a-\delta, a+\delta)$.

Aufgabe 14.36 (Fixpunktsatz von Banach)
Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit $\mathrm{Im}(f) \subseteq [a,b]$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 14.37
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $f(x) = f(x+a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein $b \in (0,a)$ gibt mit $f(b + \frac{a}{2}) = f(b)$.

Aufgabe 14.38 (Stetige Fortsetzbarkeit)

a. Sei $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig in a fortsetzbar ist, wenn f gleichmäßig stetig ist.
b. Gibt es eine beschränkte Funktion $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die sich nicht stetig in 0 fortsetzen lässt?

Aufgabe 14.39
Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und $g : [b,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[b,c]$ mit $f(b) = g(b)$, so ist auch die Funktion

$$h : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} g(x), & \text{falls } x \leq b, \\ h(x), & \text{falls } x > b \end{cases}$$

stetig auf $[a,c]$.

§ 15 Konvergenz von Funktionenfolgen

Definition 15.1 (Konvergenz von Funktionenfolgen)

a. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so nennen wir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Folge von Funktionen* auf U.

b. Wir nennen die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen *punktweise konvergent auf* U, wenn für jedes $x \in U$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert, d.h. In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

den *Grenzwert* oder die *Grenzfunktion* der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und wir sagen auch, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise gegen* f *konvergiert.* Wir schreiben dann

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Man beachte, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf U genau dann punktweise gegen f, wenn

$$\forall\, x \in U\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_{\varepsilon,x} \; : \; \forall\, n \geq n_{\varepsilon,x} \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

c. Wir sagen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig auf* U gegen f, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_\varepsilon \; : \; \forall\, n \geq n_\varepsilon \text{ und } \forall\, x \in U \text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 15.2

Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf U gleichmäßig gegen f, so konvergiert die Folge auch punktweise gegen f.

Beispiel 15.3

Die Folge $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ konvergiert auf $[0,1]$ punktweise gegen die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 1, \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Aber, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[0,1]$ *nicht* gleichmäßig gegen f.

Beachte auch, daß die Grenzfunktion nicht stetig in 1 ist, obwohl alle f_n stetig waren!

Um zu sehen, daß die Konvergenz nicht gleichmäßig ist, betrachten wir $\varepsilon := \frac{1}{4} > 0$ und ein beliebiges $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Setze $n := \max\{n_\varepsilon, 2\} \geq n_\varepsilon$ und $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$, dann gilt

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon.$$

Satz 15.4 (Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen)

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$ *eine Potenzreihe über* $\mathbb{R}$ *mit Konvergenzradius* r *und für* $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$f_n : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k.$$

Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf* $(-r,r)$ *punktweise gegen*

$$f:(-r,r)\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}a_k\cdot x^k,$$

und für jedes $0\leq R<r$ *konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf* $[-R,R]$ *gleichmäßig gegen* f*.*

Beweis: Daß die f_n auf $(-r,r)$ punktweise gegen f konvergieren, folgt unmittelbar aus der Definition von f_n und f. Es bleibt also nur, für $0\leq R<r$ zu zeigen, daß die f_n auf $[-R,R]$ gleichmäßig konvergieren.

Sei dazu $\varepsilon>0$ vorgegeben. Aus Satz 12.32 wissen wir, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\cdot R^k$ konvergiert, und wegen Lemma 12.6 ist die Folge der Restglieder dann eine Nullfolge, so daß es ein $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ gibt mit

$$\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|\cdot R^k=\left|\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|\cdot R^k\right|<\varepsilon$$

für alle $n\geq n_\varepsilon$. Sei nun $n\geq n_\varepsilon$ und $x\in[-R,R]$, so gilt

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\cdot x^k\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\cdot|x|^k\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|\cdot R^k<\varepsilon.$$

Man beachte hierbei, daß wir hier mehrfach die Proposition 11.17 a. für die betrachteten Folgen der Partialsummen verwenden. □

Beispiel 15.5
Die Folge $f_n:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\sum_{k=0}^{n}x^k$ konvergiert auf $(-1,1)$ *nicht* gleichmäßig gegen die geometrische Reihe $f:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\sum_{k=0}^{\infty}x^k$.

Um dies zu sehen, seien $\varepsilon:=1$ gegeben und $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten zunächst die stetige Funktion

$$g:(-1,1)\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\frac{x^{n_\varepsilon+1}}{1-x}.$$

Man sieht leicht, dass $\lim\limits_{x\to1}g(x)=\infty$, so dass es sicher ein $x\in(0,1)$ mit

$$\frac{x^{n_\varepsilon+1}}{1-x}=g(x)\geq1=\varepsilon$$

geben muss. Für dieses x gilt nun

$$|f_{n_\varepsilon}(x)-f(x)|=\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty}x^k=x^{n_\varepsilon+1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{x^{n_\varepsilon+1}}{1-x}\geq\varepsilon.$$

Mithin konvergiert f_n auf $(-1,1)$ nicht gleichmäßig gegen f.

Satz 15.6 (Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig.)
Ist $f_n:U\longrightarrow\mathbb{R}$ *stetig auf* U *für* $n\in\mathbb{N}$ *und konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *auf* U *gleichmäßig gegen* f*, so ist* f *stetig auf* U*.*

Beweis: Seien $a \in U$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren, gilt:

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, n \geq n_\varepsilon \text{ und } \forall\, x \in U \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da zudem f_{n_ε} stetig in a ist, gilt:

$$\exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall\, x \in U \text{ mit } |x - a| < \delta_\varepsilon \text{ gilt } |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sei nun $x \in U$ mit $|x - a| < \delta_\varepsilon$ gegeben, so gilt

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a)| + |f_{n_\varepsilon}(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Mithin ist f stetig in a. □

Korollar 15.7 (Potenzreihen sind stetig.)
Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ *eine Potenzreihe mit Konvergenzradius* r*, dann ist*

$$f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

stetig auf $(-r, r)$*.*

Beweis: Sei $x \in (-r, r)$ beliebig, so ist $0 \leq R < r$ für $R := \frac{|x|+r}{2}$. Nach Satz 15.4 konvergiert die Folge stetiger Funktionen

$$f_n : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

auf $[-R, R]$ gleichmäßig gegen f, und nach Satz 15.6 ist f mithin stetig auf $[-R, R]$ und damit insbesondere in $x \in (-R, R)$. □

Beispiel 15.8
Die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus sind stetig auf $\mathbb{R}$.

Dies folgt aus Korollar 15.7 zusammen mit den Sätzen 12.36 und 12.38.

Aufgaben

Aufgabe 15.9
Für $n \geq 2$ sei $f_n = \sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[0, \infty)$.

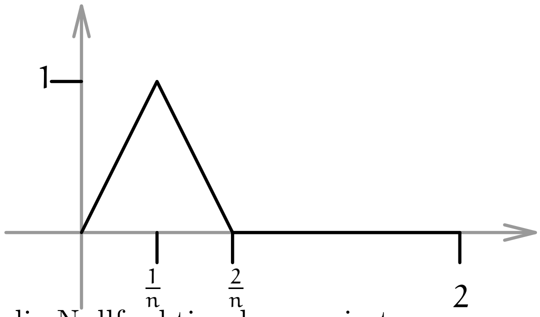
b. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $[1, 100]$.

Aufgabe 15.10
Finden Sie eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen die Nullfunktion konvergiert, aber unbeschränkt ist, d.h., so dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $x \in [0, 1]$ existiert mit $|f_n(x)| > c$.

Aufgabe 15.11

Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ von Funktionen $f_n : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n}) \\ 2 - nx, & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \\ 0, & x \in [\frac{2}{n}, 2] \end{cases},$$



punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.

§ 16 Exponentialfunktion, Logarithmus, trigonometrische Funktionen

A) Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen

Satz 16.1 (Die Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion

$$\exp : (-\infty, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$$

ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Insbesondere gelten

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty.$$

Beweis: Für $z \in \mathbb{R}$ mit $z > 0$ gilt offenbar

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \geq \frac{z^1}{1!} + \frac{z^0}{0!} = z + 1 > 1, \tag{21}$$

und mit Hilfe der Funktionalgleichung in Satz 12.36 folgt dann

$$\exp(-z) \cdot \exp(z) = \exp(-z + z) = \exp(0) = 1$$

sowie

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} > 0, \tag{22}$$

die Exponentialfunktion nimmt also nur positive Werte an. Wenden wir die Funktionalgleichung noch mal für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ wie folgt an

$$\exp(y) = \exp(y - x + x) = \exp(y - x) \cdot \exp(x) \overset{(21),(22)}{>} 1 \cdot \exp(x) = \exp(x),$$

so erhalten wir, dass exp streng monoton wachsend ist. Da exp nach Beispiel 15.8 zudem stetig ist, können wir den Umkehrsatz für streng monotone Funktionen 14.21 anwenden und erhalten, dass

$$\exp : (-\infty, \infty) \longrightarrow (c, d)$$

auch bijektiv ist, wobei

$$c = \inf(\mathrm{Im}(f)) \overset{14.22}{=} \lim_{x\to-\infty} \exp(x)$$

und

$$d = \sup(\mathrm{Im}(f)) \overset{14.22}{=} \lim_{x\to\infty} \exp(x).$$

Nun gilt für $x > 0$ aber

$$\exp(x) \overset{(21)}{\geq} x + 1 \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

so dass $d = \lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ folgt.

Mit (22) und aus den Grenzwertsätzen für uneigentliche Grenzwerte von Funktionen folgt zudem

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\infty} = 0,$$

d.h. $c = \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$. □

Bemerkung 16.2
Die Zahl $e = \exp(1)$ ist irrational und es gilt $2 < e < 3$ (siehe auch Beispiel 18.33).

Beweis: Aus (21) wissen wir

$$\exp(1) > 1 + 1 = 2.$$

Wegen

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

für $k \geq 1$ folgt unter Berücksichtigung der endlichen geometrischen Reihe 7.12

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{8} \cdot \sum_{k=0}^{n-4} \frac{1}{2^k} = \frac{8}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{8}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8}{3} + \frac{1}{4} = \frac{35}{12} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Grenzwertbildung liefert deshalb $\exp(1) = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \frac{35}{12} < 3$.

Wir müssen nun noch zeigen, dass e keine rationale Zahl sein kann. Nehmen wir dazu an, es gelte $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Wegen $2 < e < 3$ muss $q \geq 2$ sein. Wir betrachten nun die Zahlen

$$a := \frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \ldots + \frac{q!}{q!} \in \mathbb{Z}$$

und

$$b := \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} = q! \cdot e - a = (q-1)! \cdot p - a \in \mathbb{Z}. \tag{23}$$

Da $q \geq 2$ ist, folgt für $n > q$

$$\frac{q!}{n!} = \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2) \cdots n} \leq \frac{1}{3 \cdot 3 \cdots 3} = \frac{1}{3^{n-q}}$$

und deshalb

$$b = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} \leq \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-q}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{2}$$

Da aber aufgrund der Definition von b auch

$$b = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!}{n!} > 0$$

gilt, kann b keine ganze Zahl sein, im Widerspruch zu (23). Der Widerspruch kommt von unserer Annahme, dass e eine rationale Zahl wäre. □

Definition 16.3 (Natürlicher Logarithmus)
Die Umkehrabbildung der Exponentialfunktion wird mit

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$$

bezeichnet und *(natürlicher) Logarithmus* genannt.

Satz 16.4 (Natürlicher Logarithmus)
Der natürliche Logarithmus

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$$

ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Insbesondere gelten

$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty.$$

Beweis: Die Aussagen folgen aus dem Umkehrsatz für streng monotone Funktionen 14.21 und Satz 16.1 unter Berücksichtigung von Bemerkung 14.22. □

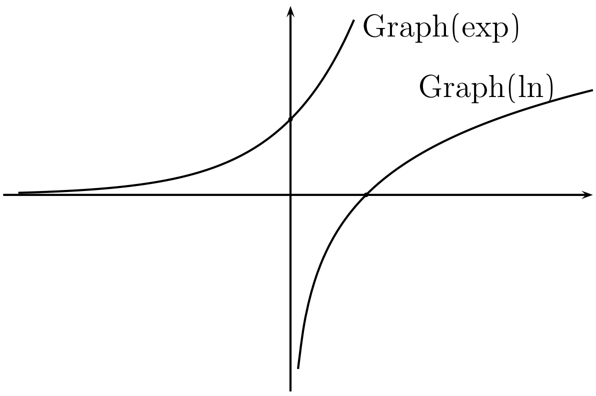
Bemerkung 16.5
Man beachte, dass aus

$$\exp(0) = 1 \quad \text{und} \quad \exp(1) = e$$

unmittelbar

$$\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(e) = 1$$

folgt. Die Graphen der Exponentialfunktion und des natürlichen Logarithmus sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



Definition 16.6 (Exponentialfunktion zur Basis a)
Für $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$a^x := \exp\big(x \cdot \ln(a)\big).$$

Man beachte, dass damit $e^x = \exp(x \cdot \ln(e)) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x)$ gilt, so dass die neue Definition im Fall $a = e$ mit der Definition aus Bemerkung 12.37 übereinstimmt.

Satz 16.7 (Exponential- und Logarithmusfunktion zur Basis a)
Es sei $a \in \mathbb{R}$ *mit* $a > 0$ *und* $a \neq 1$.

a. *Die Abbildung*

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty) : x \mapsto a^x$$

heißt Exponentialfunktion zur Basis a, *ist stetig, bijektiv und*

- *streng monoton wachsend, falls* $a > 1$, *und*
- *streng monoton fallend, falls* $a < 1$.

b. *Die Umkehrabbildung*

$$\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

von $\exp_a$ *heißt* Logarithmus zur Basis a, *ist stetig, bijektiv und*

- *streng monoton wachsend, falls* $a > 1$, *und*
- *streng monoton fallend, falls* $a < 1$.

Beweis: Für $a > 1$ ist $\ln(a) > 0$, da $\ln(1) = 0$ und ln streng monoton wachsend, so dass aus $x < y$ auch

$$\ln(a) \cdot x < \ln(a) \cdot y$$

und damit

$$\exp_a(x) = \exp\big(x \cdot \ln(a)\big) < \exp\big(y \cdot \ln(a)\big) = \exp_a(y)$$

folgt. $\exp_a$ ist dann also streng monoton wachsend. Außerdem gilt

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln(a) = \infty \quad \text{sowie} \quad \lim_{x \to -\infty} x \cdot \ln(a) = -\infty,$$

und da exp stetig ist folgt dann auch

$$\lim_{x \to \infty} \exp_a(x) = \lim_{x \to \infty} \exp\big(x \cdot \ln(a)\big) = \infty$$

sowie

$$\lim_{x \to -\infty} \exp_a(x) = \lim_{x \to -\infty} \exp\big(x \cdot \ln(a)\big) = 0.$$

Aus dem Umkehrsatz für streng monotone Funktionen 14.21 folgt dann, weil $\exp_a$ stetig, und streng monoton wachsend ist, dass $\exp_a$ auch bijektiv ist. Zudem folgen die entsprechenden Aussagen über die Umkehrfunktion $\log_a$ für $a > 1$.

Den Fall $a < 1$ beweist man analog, da dann $\ln(a) < 0$ gilt. □

Korollar 16.8 (Potenzgesetze)
Seien $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $a, b > 0$.

a. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

b. $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$.

c. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

d. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

e. *Für* $n \in \mathbb{Z}$ *stimmen die Definitionen von* a^n *in 7.9 und 16.6 überein.*

f. *Für* $p, q \in \mathbb{Z}$ *mit* $q \geq 2$ *gilt* $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
Insbesondere stimmen die Definitionen von $a^{\frac{1}{q}}$ *in 9.8 und 16.6 überein.*

Beweis:

a. Mit Hilfe der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion sieht man:

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp\big((x+y)\cdot\ln(a)\big) = \exp\big(x\cdot\ln(a)+y\cdot\ln(a)\big) \\ &= \exp\big(x\cdot\ln(a)\big)\cdot\exp\big(y\cdot\ln(a)\big) = a^x\cdot a^y. \end{aligned}$$

b. Wegen $a^x = \exp(x\cdot\ln(a))$ gilt auch

$$\ln(a^x) = \ln\big(\exp(x\cdot\ln(a))\big) = x\cdot\ln(a)$$

und damit

$$(a^x)^y = \exp\big(y\cdot\ln(a^x)\big) = \exp\big(x\cdot y\cdot\ln(a)\big) = a^{x\cdot y}.$$

c. Wir verwenden in der folgenden Gleichung bereits ein Logarithmusgesetz 16.9, dessen Beweis unabhängig von diesem Potenzgesetz ist:

$$\begin{aligned} (a\cdot b)^x &= \exp\big(x\cdot\ln(a\cdot b)\big) \overset{16.9b.}{=} \exp\big(x\cdot(\ln(a)+\ln(b))\big) \\ &= \exp\big(x\cdot\ln(a)\big)\cdot\exp\big(x\cdot\ln(b)\big) = a^x\cdot b^x. \end{aligned}$$

d. Die Gleichung $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ folgt unmittelbar aus

$$a^x\cdot a^{-x} = a^{x-x} = a^0 = \exp(0\cdot\ln(a)) = \exp(0) = 1.$$

e. Mit Induktion nach $n\geq 1$ und a. sieht man, dass $a^n = \prod_{k=1}^n a$. Wir haben bereits gesehen, dass zudem $a^0 = 1$ gilt, und aus d. folgt dann

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\prod_{k=1}^n a} = \prod_{k=1}^n \frac{1}{a}.$$

Die Definitionen von a^n in 7.9 und 16.6 stimmen also überein.

f. Mit Satz 9.8 folgt $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ aus

$$\big(a^{\frac{p}{q}}\big)^q \overset{b.}{=} a^{\frac{p}{q}\cdot q} = a^p.$$

□

Korollar 16.9 (Logarithmusgesetze)
Seien $a, x, y\in\mathbb{R}_{>0}$ *mit* $a\neq 1$ *und* $z\in\mathbb{R}$.

a. $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

b. $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x)+\log_a(y)$.

c. $\log_a(x^z) = z\cdot\log_a(x)$.

d. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x)-\log_a(y)$.

Beweis:

a. Falls $a\neq 1$, so gilt

$$\exp_a\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\cdot\ln(a)\right) = \exp\big(\ln(x)\big) = x = \exp_a\big(\log_a(x)\big),$$

und da $\exp_a$ injektiv ist, gilt dann auch

$$\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \log_a(x).$$

b. Es gilt

$$\begin{aligned}\exp_a\big(\log_a(x \cdot y)\big) =& x \cdot y = \exp_a\big(\log_a(x)\big) \cdot \exp_a\big(\log_a(y)\big)\\ \overset{16.8a.}{=}& \exp_a\big(\log_a(x) + \log_a(y)\big),\end{aligned}$$

und da $\exp_a$ injektiv ist, folgt somit

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

c. Falls $a \neq 1$ und $x > 0$, so ist

$$x^z = \exp\big(z \cdot \ln(x)\big) \overset{a.}{=} \exp\big(z \cdot \log_a(x) \cdot \ln(a)\big) = \exp_a\big(z \cdot \log_a(x)\big)$$

definiert. Wenden wir auf beiden Seiten die Funktion $\log_a$ an, so erhalten wir

$$\log_a\left(x^z\right) = \log_a\left(\exp_a\left(z \cdot \log_a(x)\right)\right) = z \cdot \log_a(x).$$

d. Es gilt

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) \overset{b.}{=} \log_a(x) + \log_a(y^{-1}) \overset{c.}{=} \log_a(x) - \log_a(y).$$

□

B) Trigonometrische Funktionen

Wir wollen uns nun den trigonometrischen Funktionen zuwenden. Dazu führen wir zunächst die Zahl π als kleinste positive Nullstelle des Sinus ein.

Satz 16.10 (Definition der Zahl π.)
Der Sinus besitzt eine kleinste positive Nullstelle, die wir π nennen, und für alle $x \in (0, \pi)$ gilt $\sin(x) > 0$.

Beweis: Wir wählen ein $x \in (0, 4]$ und setzen $a_n := \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ für $n \geq 1$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend, denn

$$a_{n+1} = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{x \cdot x}{(2n+3)\cdot(2n+2)} \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{16}{20} < a_n,$$

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n = \sin(x) - x$ absolut konvergiert, muss die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ auch eine Nullfolge sein. Aus dem Beweis des Leibniz-Kriteriums erfüllen die Partialsummen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n$ dann insbesondere

$$s_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n \leq s_4,$$

und damit

$$x - \frac{x^3}{6} = x + s_1 \leq \sin(x) \leq x + s_4. \tag{24}$$

Wenden wir dies für $x = 1$ an, so erhalten wir

$$\sin(1) \geq 1 - \frac{1}{6} > 0,$$

und wenden wir die Aussage für $x = 4$ an, so erhalten wir

$$\sin(4) \leq 4 + s_4(4) = -\frac{268}{405} < 0.$$

Da der Sinus auf dem abgeschlossenen Intervall $[1, 4]$ stetig ist mit $\sin(1) > 0$ und $\sin(4) < 0$, muss er nach dem Zwischenwertsatz 14.12 eine Nullstelle besitzen, das heißt, die Menge

$$A := \{x \in [1, 4] \mid \sin(x) = 0\}$$

ist nicht leer und nach unten beschränkt. Dann existiert aber ihr Infimum

$$\pi := \inf(A).$$

Nach Bemerkung 11.22 gibt es eine monoton fallende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A, die gegen das Infimum $\pi = \inf(A)$ konvergiert. Da der Sinus stetig ist, gilt dann auch

$$0 = \sin(b_n) \longrightarrow \sin(\pi),$$

also $\sin(\pi) = 0$, d.h. π ist eine Nullstelle des Sinus.

Wir müssen nun noch zeigen, dass $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$. Für $x \in [1, \pi)$ ist dies der Fall, da entweder aus $\sin(x) = 0$ oder aus $\sin(x) < 0$ und $\sin(1) > 0$ mit Hilfe des Zwischenwertsatzes 14.12 die Existenz einer kleineren Nullstelle des Sinus als π im Intervall $[1, 4]$ folgen würde. Für $x \in (0, 1)$ folgt aber aus (24)

$$\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6} > x - \frac{x}{6} \geq \frac{5x}{6} > 0,$$

da $x^3 < x$. Also haben wir $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ gezeigt, so dass π die kleinste positive Nullstelle des Sinus ist. □

Bemerkung 16.11 (Approximation von π)
Aus dem Beweis von Satz 16.10 wissen wir bislang nur, dass $1 < \pi < 4$ gilt. Wir werden später sehen (siehe Aufgabe 18.38), dass man die Zahl π approximieren kann durch

$$3,14159\ldots.$$

Satz 16.12 (Monotonie des Cosinus)
Der Cosinus $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ *ist streng monoton fallend und bijektiv.*

Beweis: Es seien $x, y \in [0, \pi]$ mit $x < y$. Aus dem Additionstheorem für den Cosinus sowie der Tatsache, dass der Cosinus eine gerade und der Sinus eine ungerade Funktion ist (siehe Satz 12.38), folgen

$$\begin{aligned}\cos(y) &= \cos\left(\frac{y+x}{2} + \frac{y-x}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{y-x}{2}\right) - \sin\left(\frac{y+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos\left(\frac{y+x}{2}-\frac{y-x}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{y-x}{2}\right)-\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\cdot\sin\left(-\frac{y-x}{2}\right)\\ &= \cos\left(\frac{y+x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)+\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{y-x}{2}\right).\end{aligned}$$

Subtrahieren wir die beiden Gleichungen voneinander, so erhalten wir

$$\cos(x)-\cos(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \overset{16.10}{>} 0,$$

da mit $x, y \in [0, \pi]$ und $x < y$ auch

$$0 < \frac{y+x}{2} < \pi$$

und

$$0 < \frac{y-x}{2} < \pi$$

gelten muss.

Somit haben wir gezeigt, dass der Cosinus auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend ist. Aus dem Umkehrsatz 14.21 folgt damit, dass

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [\lim_{x\to\pi}\cos(x), \lim_{x\to 0}\cos(x)]$$

bijektiv ist. Da der Cosinus stetig ist, gilt nun

$$\lim_{x\to 0}\cos(x) = \cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{0^{2n}}{(2n)!} = 1$$

und

$$\lim_{x\to\pi}\cos(x) = \cos(\pi).$$

Aus Satz 12.38 wissen wir zudem, dass

$$\cos(\pi)^2 = 1-\sin(\pi)^2 = 1-0 = 1$$

gilt, so dass $\cos(\pi) \in \{1, -1\}$. Da der Cosinus auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit $\cos(0) = 1$ ist, muss somit $\cos(\pi) = -1$ gelten. □

Satz 16.13 (Eigenschaften des Sinus und des Cosinus)

a. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gelten*

$$\sin(x+\pi) = -\sin(x) \quad \textit{und} \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x).$$

b. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gelten zudem*

$$\sin(x) \in [-1, 1] \quad \textit{und} \quad \cos(x) \in [-1, 1].$$

c. *Wir können folgende Werte des Sinus und Cosinus explizit angeben:*

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\cdot\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	1

d. *Sinus und Cosinus sind 2π-periodisch, d.h. für $x \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \textit{und} \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x).$$

e. *Die Perioden von Sinus und Cosinus sind um $\frac{\pi}{2}$ verschoben, d.h. für $x \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

und

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(x).$$

f. *Der Sinus*

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

ist streng monoton wachsend und bijektiv.

g. *Die Nullstellen des Sinus sind genau die ganzzahligen Vielfachen von π, d.h.*

$$\sin(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

und für den Cosinus gilt mithin

$$\cos(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Beweis:

a. Aus den Additionstheoremen 12.38 erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin(x+\pi) &= \sin(x)\cdot\cos(\pi) + \sin(\pi)\cdot\cos(x)\\ &= \sin(x)\cdot(-1) + 0\cdot\cos(x) = -\sin(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(x+\pi) &= \cos(x)\cdot\cos(\pi) - \sin(x)\cdot\sin(\pi)\\ &= \cos(x)\cdot(-1) - \sin(x)\cdot 0 = -\cos(x).\end{aligned}$$

b. Nach Satz 12.38 gilt

$$|\sin(x)| \leq \sqrt{\cos(x)^2+\sin(x)^2} = 1$$

und

$$|\cos(x)| \leq \sqrt{\cos(x)^2+\sin(x)^2} = 1.$$

c. Die Werte für $x = 0$ folgen unmittelbar aus der Definition von Sinus und Cosinus als Potenzreihen

$$\sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

und

$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{0^{2n}}{(2n)!} = 1.$$

Die Werte für $x = \pi$ folgen aus Satz 16.10 und Satz 16.12 oder alternativ aus Teil a.. Mit Hilfe der Additionstheoreme 12.38 folgt dann

$$-1 = \cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

und somit

$$0 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1 \overset{\text{b.}}{\leq} 0.$$

Damit müssen notwendigerweise

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

und

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \{-1, 1\}$$

gelten. Da wir aber aus Satz 16.10 wissen, dass der Sinus auf dem Intervall $(0, \pi)$ strikt positiv ist, folgt

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Aus dem Additionstheorem für den Cosinus erhalten wir dann

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$$

und damit

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Aus Satz 12.38 wissen wir zudem

$$1 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2,$$

und damit

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Nach Satz 16.12 ist der Cosinus auf $[0, \pi]$ streng monoton fallend mit Nullstelle bei $\frac{\pi}{2}$, also muss $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ positiv sein, und aus Satz 16.10 wissen wir, dass auch $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ positiv ist. Mithin gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Die übrigen Werte folgen, indem wir Teil a. auf die bisherigen Ergebnisse anwenden.

d. Durch Anwenden der Additionstheoreme 12.38 erhalten wir wie in Teil a.

$$\begin{aligned}\sin(x+2\pi) &= \sin(x)\cdot\cos(2\pi)+\sin(2\pi)\cdot\cos(x)\\ &= \sin(x)\cdot 1+0\cdot\cos(x)=\sin(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(x+2\pi) &= \cos(x)\cdot\cos(2\pi)-\sin(x)\cdot\sin(2\pi)\\ &= \cos(x)\cdot 1-\sin(x)\cdot 0=\cos(x).\end{aligned}$$

e. Auch diese Aussage folgt aus den Additionstheoremen 12.38 wie in Teil a.:

$$\begin{aligned}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(x)\\ &= \sin(x)\cdot 0+1\cdot\cos(x)=\cos(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x)\cdot\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sin(x)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos(x)\cdot 0+\sin(x)\cdot 1=\sin(x).\end{aligned}$$

f. Aus Teil a. und e. folgt

$$\sin(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

so dass die Aussage aus Satz 16.12 folgt.

g. Aus Teil a. und $\sin(\pi)=0$ folgt mit Induktion, dass $\sin(k\cdot\pi)=0$ für alle $k\in\mathbb{Z}$. Ist umgekehrt $x\in\mathbb{R}$ eine Nullstelle des Sinus, so gibt es eine ganze Zahl $k\in\mathbb{Z}$, so dass

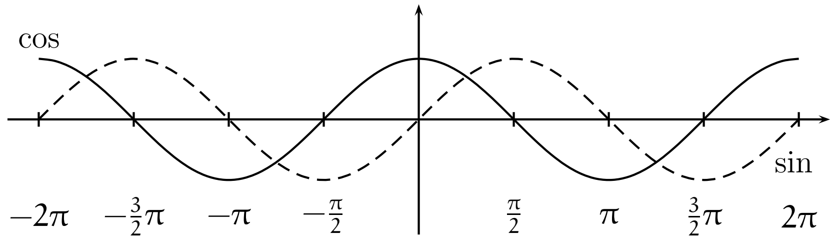
$$0\le x-k\cdot\pi<\pi,$$

und da der Sinus im Intervall $(0,\pi)$ keine Nullstelle besitzt, muss mithin $x=k\cdot\pi$ gelten. Aus Teil e. folgt dann die Aussage für die Nullstellen des Cosinus.

□

Bemerkung 16.14

Aus Satz 16.13 können wir den Verlauf der Graphen des Sinus und des Cosinus im wesentlichen herleiten:



Bemerkung 16.15 (Polarkoordinaten)
Ist $x \in \mathbb{R}$ und betrachten wir ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $\sin(x)$ und $\cos(x)$, so folgt wegen

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1 = 1^2$$

aus dem Satz von Pythagoras, dass die Hypothenuse die Seitenlänge 1 besitzt. D.h. der Punkt

$$(\cos(x), \sin(x)) = \cos(x) + i \cdot \sin(x) = \exp(i \cdot x) \in \mathbb{C}$$

liegt auf dem Einheitskreis und wir nennen x den Winkel im Bogenmaß, den der Strahl vom Ursprung durch diesen Punkt mit der x-Achse einschließt (siehe Abbildung 7).

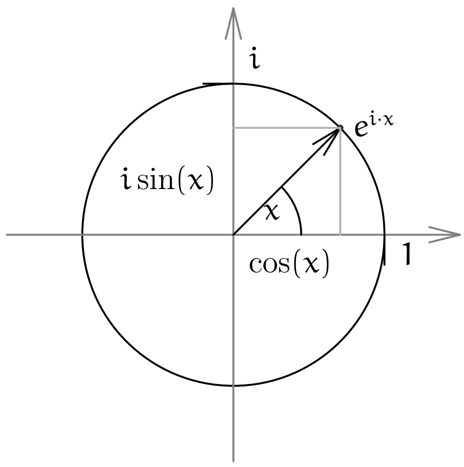


Abbildung 7. Polarkoordinaten von $e^{i\cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

Ist umgekehrt $z = a + ib = (a, b)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, so folgt aus $1 = a^2 + b^2$ sofort, dass $a \in [-1, 1]$ liegt. Da der Cosinus bijektiv auf dem Intervall $[0, \pi]$ mit Bild $[-1, 1]$ ist, gibt es genau ein $x \in [0, \pi]$ mit $a = \cos(x)$, und es gilt

$$\sin(x)^2 = 1 - \cos(x)^2 = 1 - a^2 = b^2,$$

d.h. $b \in \{-\sin(x), \sin(x)\} = \{\sin(-x), \sin(x)\}$. Wegen $a = \cos(x) = \cos(-x)$ finden wir also ein $y \in [-\pi, \pi]$ mit

$$z = a + ib = \cos(y) + i \cdot \sin(y) = e^{i\cdot y},$$

d.h. jeder Punkt auf dem Einheitskreis hat die Gestalt $z = e^{i\cdot y}$ mit $y \in \mathbb{R}$. Genauer kann man sogar sagen, dass es genau ein solches $y \in [-\pi, \pi)$ gibt.

Wir haben damit die Behauptung aus Bemerkung 10.9 gezeigt, dass jede komplexe Zahl z sich schreiben lässt als

$$z = |z| \cdot e^{i\cdot \arg z},$$

und wir können $\arg(z)$ im Intervall $[-\pi, \pi)$ eindeutig wählen. Wir nennen diese Darstellung die *Polarkoordinatendarstellung* von z.

Außerdem haben wir damit auch Bemerkung 10.11 gezeigt, dass nämlich jede komplexe Zahl eine n-te Wurzel besitzt, da wir dazu nur die Polarkoordinatendarstellung von z benötigt haben.

Man beachte, dass für $n \geq 2$ die Zahlen

$$e^{\frac{2\cdot k\cdot\pi\cdot i}{n}} \quad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

genau die n-ten Wurzeln aus 1 sind. Man nennt sie auch die n-*ten Einheitswurzeln*.

Dass sie in der Tat n-te Wurzeln von 1 sind, folgt unmittelbar aus

$$\left(e^{\frac{2\cdot k\cdot\pi\cdot i}{n}}\right)^n = e^{2\cdot k\cdot\pi\cdot i} = \cos(2\cdot k\cdot\pi) + i\cdot\sin(2\cdot k\cdot\pi) = 1.$$

Und dass es keine weiteren n-ten Wurzeln geben kann, folgt aus der Tatsache, dass jede n-te Wurzel eine Nullstelle des Polynoms $t^n - 1$ ist und dieses nach Bemerkung 13.12 höchstens n verschiedene Nullstellen besitzen kann.

Definition 16.16 (Tangens und Cotangens)
Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

heißt *Tangens* und die Funktion

$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

heißt *Cotangens*.

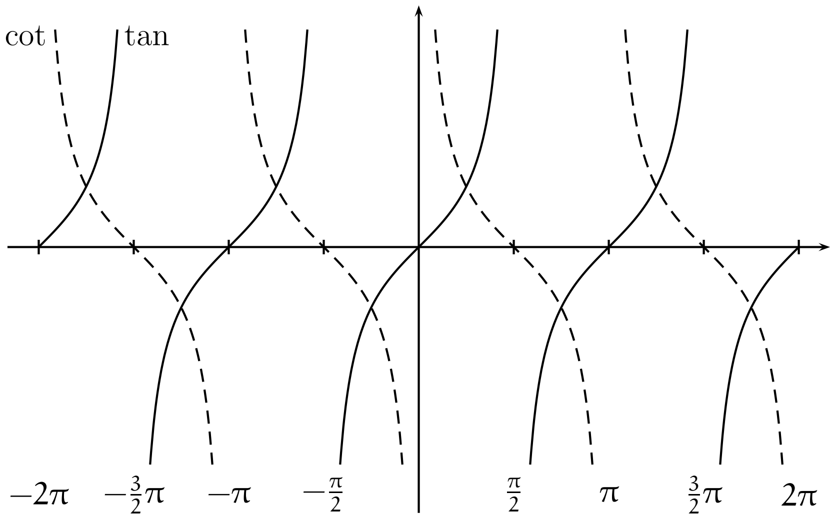


Abbildung 8. Tangens und Cotangens

Satz 16.17 (Tangens und Cotangens)

a. *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gelten*

$$\tan(-x) = -\tan(x) \quad \textit{und} \quad \cot(-x) = -\cot(x)$$

und

$$\tan(x+\pi) = \tan(x) \quad \textit{und} \quad \cot(x+\pi) = \cot(x).$$

b. *Der Tangens ist auf jedem der Intervalle* $\left(-\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi, \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, *streng monoton wachsend, stetig, bijektiv mit Bild* $\mathbb{R}$ *und punktsymmetrisch zu seiner Nullstelle* $k\cdot\pi$.

c. *Der Cotangens ist auf jedem der Intervalle* $(k\cdot\pi,(k+1)\cdot\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$, *streng monoton fallend, stetig, bijektiv mit Bild* $\mathbb{R}$ *und punktsymmetrisch zu seiner Nullstelle* $\frac{2k+1}{2}\cdot\pi$.

Beweis:

a. Die Aussagen folgen unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für den Sinus und Cosinus in Satz 12.38 und Satz 16.13.

b. Für $0\leq x<y<\frac{\pi}{2}$ folgt aus der Monotonie des Cosinus (Satz 16.12) und des Sinus (Satz 16.13)

$$\cos(x)>\cos(y)>0$$

und

$$0<\sin(x)<\sin(y),$$

so dass mithin

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}<\frac{\sin(y)}{\cos(y)}=\tan(y).$$

Der Tangens ist auf dem Intervall $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ also streng monoton wachsend. Wegen $\tan(-x)=-\tan(x)$ ist der Tangens aber punktsymmetrisch zum Ursprung und somit auch streng monoton wachsend auf $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$, also streng monoton wachsend auf $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Wegen der Stetigkeit von Sinus und Cosinus erhalten wir zudem

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin(x)}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos(x)}=\frac{1}{0}=\infty$$

und

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\tan(x)=\frac{\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\sin(x)}{\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\cos(x)}=\frac{-1}{0}=-\infty.$$

Aus dem Umkehrsatz 14.21 folgt dann, dass die stetige Funktion

$$\tan:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$$

bijektiv ist. Aus Teil a. folgt die Aussage zur Punktsymmetrie, und zudem die Aussage für die verschobenen Intervalle.

c. Die Aussage wird analog zur Aussage in Teil b. bewiesen.

□

Satz 16.18 (Arcusfunktionen)

a. *Die Funktion* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ *besitzt eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrabbildung, die wir* Arcussinus *nennen,*

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

b. *Die Funktion* $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ *besitzt eine stetige, streng monoton fallende Umkehrabbildung, die wir* Arcuscosinus *nennen,*

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi].$$

c. *Die Funktion* $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ *besitzt eine stetige, streng monoton wachsende Umkehrabbildung, die wir* Arcustangens *nennen,*

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

d. *Die Funktion* $\cot : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$ *besitzt eine stetige, streng monoton fallende Umkehrabbildung, die wir* Arcuscotangens *nennen,*

$$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi).$$

Beweis: Die Aussagen folgen aus dem Umkehrsatz 14.21 zusammen mit den Monotonieaussagen in den Sätzen 16.12, 16.13 und 16.17. □

Aufgaben

Aufgabe 16.19

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$. Zeige, dann ist $f = \exp_a$.

Aufgabe 16.20

a. Zeige, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $0 \neq a_n \in \mathbb{R}_{>-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

b. Für $x \in \mathbb{R}$ zeige $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

c. Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ zeige $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln(a)$.

Aufgabe 16.21 (Additionstheoreme für Tangens und Arcustangens)

a. Zeigen Sie das folgende Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)},$$

wobei $x, y, x + y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ gelten soll.

b. Folgern Sie daraus das folgende Additionstheorem für den Arcustangens:

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

c. Zeige die Gleichung

$$4 \cdot \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

§ 17 Differenzierbarkeit

A) Differenzierbarkeit

Definition 17.1 (Differenzenquotient)
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$. Die Funktion

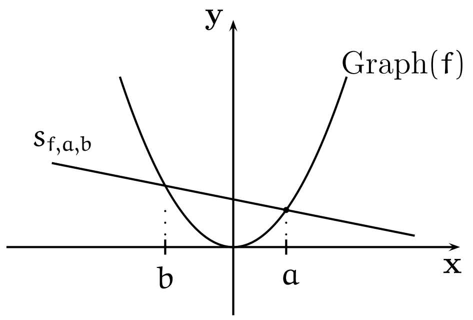
$$\mathrm{Diff}_{f,a} : U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

heißt der *Differenzenquotient* von f an der Stelle a.

Für ein festes b ist der Wert des Differenzenquotienten $\mathrm{Diff}_{f,a}(b)$ die *Steigung* der *Sekante* $s_{f,a,b}$ an den Graphen von f durch die Punkte $(b, f(b))$ und $(a, f(a))$, deren Geradengleichung durch

$$\begin{aligned} y =& \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \frac{f(a) \cdot b - f(b) \cdot a}{b - a} \\ =& \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a \end{aligned} \tag{25}$$

gegeben ist.



Beispiel 17.2
Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ mit $n \geq 1$, so ist

$$\mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + a^2 \cdot x^{n-3} + \ldots + a^{n-2} \cdot x + a^{n-1}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Definition 17.3
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$. Wir nennen f *differenzierbar in* a, wenn a ein Häufungspunkt von U ist und der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \mathrm{Diff}_{f,a}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

des Differenzenquotienten in a existiert. In diesem Fall schreiben wir

$$f'(a) := \frac{\partial f}{\partial x}(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

und nennen diesen Grenzwert die *Ableitung* von f an der Stelle a.

Wir nennen die Funktion f *differenzierbar (auf* U*)*, wenn f in jedem Punkt von U differenzierbar ist. In diesem Fall nennen wir die Funktion

$$f' : U \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$$

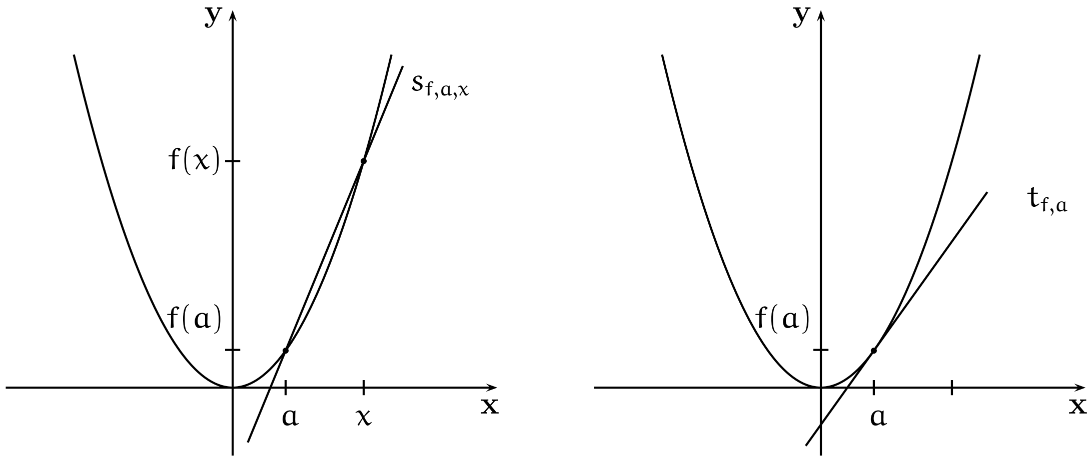
die *Ableitung* von f. Beachten Sie auch, dass dann insbesondere jeder Punkt von U ein Häufungspunkt von U sein muss!

Bemerkung 17.4

Der Definition liegt die Idee zugrunde, dass sich die Sekante $s_{f,a,x}$ für $x \to a$ einer Geraden annähert, die im Punkt $(a, f(a))$ den Graphen von f berührt und ihn optimal *linear approximiert*. Diese Gerade wollen wir die *Tangente* $t_{f,a}$ von f in a nennen, und der Grenzwert des Differenzenquotienten, d.h. die Steigung von $s_{f,a,x}$ konvergiert dann für $x \to a$ gegen die Steigung der Tangenten. D.h. die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$ hat die Geradengleichung

$$y = f'(a) \cdot x + \big(f(a) - a \cdot f'(a)\big) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a),$$

die sich aus (25) ergibt, indem man den Grenzwert für $b = x$ gegen a betrachtet.



Beispiel 17.5

Die folgenden Funktionen sind alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und dort ist jeder Punkt ein Häufungspunkt!

a. Eine konstante Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und die Ableitung ist die Nullfunktion

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 0,$$

da für jedes $a \in \mathbb{R}$ der Differenzenquotient $\mathrm{Diff}_{f,a}$ die Nullfunktion ist und somit der Grenzwert $f'(a) = 0$ existiert.

b. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$$

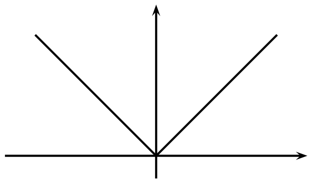
differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto n \cdot x^{n-1},$$

da sich für $a \in \mathbb{R}$ aus Beispiel 17.2 folgendes ergibt:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \big(x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + a^2 \cdot x^{n-3} + \ldots + a^{n-2} \cdot x + a^{n-1}\big) = n \cdot a^{n-1}.$$

c. Die Betragsfunktion
$$|\cdot|:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto|x|$$
ist in $a=0$ *nicht* differenzierbar. In jedem anderen Punkt a ist sie jedoch differenzierbar mit $f'(a)=-1$ falls $a<0$ und $f'(a)=1$ falls $a>0$.



Anschaulich bedeutet die Nicht-Differenzierbarkeit im Punkt $a=0$, dass man am Graphen im Ursprung keine klare Tangente findet.
Um die Nicht-Differenzierbarkeit in $a=0$ zu sehen, betrachten wir die Nullfolge $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$. Die zugehörige Folge der Werte des Differenzenquotienten
$$\left(\mathrm{Diff}_{f,0}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)_{n\geq 1}=\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{n}}\right)_{n\geq 1}=\left((-1)^n\right)_{n\geq 1}$$
ist nicht konvergent. Mithin existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten in $a=0$ nicht, und somit ist die Funktion in $a=0$ nicht differenzierbar.
Außerdem, ist $a<0$ und x nahe bei a, so ist auch $x<0$ und mithin
$$\mathrm{Diff}_{f,a}(x)=\frac{|x|-|a|}{x-a}=\frac{-x+a}{x-a}=-1\stackrel{x\to a}{\longrightarrow}-1,$$
und analog ist für $a>0$ und x nahe bei a auch $x>0$, so dass
$$\mathrm{Diff}_{f,a}(x)=\frac{|x|-|a|}{x-a}=\frac{x-a}{x-a}=1\stackrel{x\to a}{\longrightarrow}1.$$
Damit ist auch gezeigt, dass die Ableitung in allen Punkten $a\neq 0$ existiert.

Bemerkung 17.6

a. Wie bei der Stetigkeit wollen wir auch bei der Differenzierbarkeit anmerken, dass es sich um eine *lokale* Eigenschaft der Funktion handelt. D.h. sie ist punktweise definiert und hängt nur vom Verhalten der Funktion in einer sehr kleinen ε-Umgebung des betrachteten Punktes a ab!

b. Ist a ein Häufungspunkt von U und $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$, so ist f genau dann in a differenzierbar, wenn der Grenzwert
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\in\mathbb{R}$$
existiert.
Um dies zu sehen ersetzt man im Differenzenquotienten einfach $x-a$ durch h.

c. Ist a ein Häufungspunkt von U und $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$, so ist f genau dann in a differenzierbar, wenn es eine Zahl $c\in\mathbb{R}$ und eine Funktion $\rho:U\longrightarrow\mathbb{R}$ gibt, so dass
$$f(x)=f(a)+c\cdot(x-a)+\rho(x)\quad\text{und}\quad\lim_{x\to a}\frac{\rho(x)}{|x-a|}=0$$

gilt.

Man beachte, ist f differenzierbar in a, so wählt man $c = f'(a)$ und $\rho(x) = \big(\mathrm{Diff}_{f,a}(x) - f'(a)\big) \cdot (x-a)$. Umgekehrt, wenn c und ρ existieren, so ist $\mathrm{Diff}_{f,a}(x) = c + \frac{\rho(x)}{x-a}$ und der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nach Voraussetzung.

Wir erwähnen diese äquivalente Formulierung der Differenzierbarkeit an dieser Stelle, da sie für die Verallgemeinerung des Begriffes in der mehrdimensionalen Analysis von Vorteil ist (siehe Bemerkung **??** und Definition **??**). Die Bedeutung der Bedingung $\lim\limits_{x\to a} \frac{\rho(x)}{|x-a|} = 0$ ist, dass die Funktion ρ, die den Unterschied des Differenzenquotienten und der Ableitung beschreibt, sehr schnell gegen Null konvergiert für $x \to a$, jedenfalls schneller als die lineare Funktion $x - a$.

Satz 17.7 (Differenzierbar impliziert stetig.)
Ist $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar in* a*, so ist* f *stetig in* a*.*

Beweis: Da nach Voraussetzung a ein Häufungspunkt von U ist, müssen wir nach Lemma 14.3 nur zeigen, dass $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ oder alternativ $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$ gilt. Nach Voraussetzung existiert der Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R},$$

und da die Identität stetig ist, gilt zudem $\lim\limits_{x\to a}(x-a) = 0$. Mithin erhalten wir aus den Grenzwertsätzen für Funktionen 13.10

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot (x-a) \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Also ist f stetig in a. □

Beispiel 17.8
Die Umkehrung von Satz 17.7 gilt nicht, wie das Beispiel der Betragsfunktion zeigt, die stetig in $a = 0$ ist (siehe Beispiel 14.6), ohne dort differenzierbar zu sein (siehe Beispiel 17.5).

B) Ableitungsregeln

Proposition 17.9 (Linearität der Ableitung)
Seien $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* $a \in U$ *differenzierbar und sei* $c, d \in \mathbb{R}$*.*
Dann ist $c\cdot f + d\cdot g$ *differenzierbar in* a *mit* $(c\cdot f + d\cdot g)'(a) = c\cdot f'(a) + d\cdot g'(a)$*.*

Beweis: Wir beachten zunächst, dass nach Voraussetzung a ein Häufungspunkt von U ist und dass U jeweils der Definitionsbereich der Funktionen ist. Dann folgt aus den Grenzwertsätzen für Funktionen 13.10, dass der Grenzwert

$$\begin{aligned}(c\cdot f+d\cdot g)'(a) =& \lim_{x\to a}\frac{c\cdot f(x)+d\cdot g(x)-c\cdot f(a)-d\cdot g(a)}{x-a}\\ =&c\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+d\cdot\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\ =&c\cdot f'(a)+d\cdot g'(a)\end{aligned}$$

existiert. □

Beispiel 17.10 (Polynomfunktionen sind differenzierbar.)
Ist $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k$ eine Polynomfunktion, so ist f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$f':\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}:x\mapsto\sum_{k=1}^{n}k\cdot a_k\cdot x^{k-1}.$$

Dies folgt unmittelbar aus Proposition 17.9 und Beispiel 17.5.

Proposition 17.11 (Produktregel)
Seien $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ *und* $g:U\longrightarrow\mathbb{R}$ *in* $a\in U$ *differenzierbar, so ist* $f\cdot g$ *differenzierbar in* a *mit*

$$(f\cdot g)'(a)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a).$$

Beweis: Wir beachten, dass nach Voraussetzung a ein Häufungspunkt von U ist und dass U der Definitionsbereich von $f\cdot g$ ist. Der Differenzenquotient von $f\cdot g$ an der Stelle a genügt der Gleichung

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}_{f\cdot g,a}(x) =&\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\ =&\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)+f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\ =&\frac{f(x)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(x)}{x-a}+\frac{f(a)\cdot g(x)-f(a)\cdot g(a)}{x-a}\\ =&\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)+f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.\end{aligned}$$

Da f und g in a differenzierbar sind und da g nach Satz 17.7 zudem stetig in a ist, existiert damit der Grenzwert

$$(f\cdot g)'(a)=\lim_{x\to a}\mathrm{Diff}_{f\cdot g,a}(x)=f'(a)\cdot g(a)+f(a)\cdot g'(a)$$

aufgrund der Grenzwertsätze für Funktionen 13.10. □

Proposition 17.12 (Quotientenregel)
Seien $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ *und* $g:U\longrightarrow\mathbb{R}$ *in* $a\in U$ *differenzierbar mit* $g(a)\neq 0$, *so ist auch* $\frac{f}{g}:\{x\in U\mid g(x)\neq 0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ *differenzierbar in* a *mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g(a)^2}.$$

Beweis: Wir müssen zunächst einmal zeigen, dass a ein Häufungspunkt der Menge

$$V := \{x \in U \mid g(x) \neq 0\}$$

ist. Wegen Satz 17.7 ist g stetig in a, und da a ein Häufungspunkt von U ist gilt somit

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a) \neq 0.$$

Dann folgt aus Proposition 13.10 c. aber bereits, dass a auch ein Häufungspunkt von V ist.

Ferner gilt für den Differenzenquotienten

$$\mathrm{Diff}_{\frac{1}{g},a}(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} = -\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \frac{1}{g(x) \cdot g(a)}.$$

Da g in a differenzierbar und stetig ist, existiert damit der Grenzwert

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \mathrm{Diff}_{\frac{1}{g},a}(x) = -\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)\cdot g(a)} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}.$$

Wenden wir nun die Produktformel 17.11 auf $f \cdot \frac{1}{g}$ an, so folgt das Ergebnis. □

Aus der Quotientenregel und Beispiel 17.10 folgt die folgende Aussage.

Beispiel 17.13
Jede rationale Funktion $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Z.B. gilt für $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ mit $n \geq 1$ für die Ableitung

$$h' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

□

Aufgrund des Umkehrsatzes für streng monotone Funktionen 14.21 sowie Bemerkung 14.22 wissen wir, dass eine stetige und streng monotone Funktion auf einem Intervall eine stetige Umkehrfunktion besitzt. Dabei kann das Intervall offen, halboffen oder abgeschlossen sein und es kann auch ein uneigentliches Intervall sein. Wir wenden uns nun der Frage zu, ob die Umkehrfunktion differenzierbar ist, wenn f differenzierbar ist.

Satz 17.14 (Ableitung der Umkehrfunktion)
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei stetig und streng monoton (wachsend oder fallend). Ist* f *differenzierbar in* a *und ist* $f'(a) \neq 0$*, so ist die Umkehrfunktion*

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$$

differenzierbar in $b := f(a)$ *und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Beweis: Aus dem Umkehrsatz 14.21 sowie Bemerkung 14.22 wissen wir, dass die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$$

existiert und dass sie stetig und bijektiv ist.

Wir betrachten nun eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $f(I) \setminus \{b\}$ mit $y_n \longrightarrow b$. Da f^{-1} stetig ist, gilt dann

$$x_n := f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(b) = a.$$

Da f^{-1} bijektiv ist, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Aufgrund der Grenzwertsätze für Folgen 11.15 erhalten wir dann

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\mathrm{Diff}_{f,a}(x_n)} \longrightarrow \frac{1}{f'(a)},$$

und wegen des Folgenkriteriums für Grenzwerte 13.7 existiert somit der Grenzwert

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \lim_{y\to b} \mathrm{Diff}_{f^{-1},b}(y) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Beispiel 17.15

Für $n \geq 2$ ist die Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto x^n$$

streng monoton wachsend und stetig nach Beispiel 14.23 mit der Wurzelfunktion als Umkehrfunktion und mit der Ableitung

$$f' : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : x \mapsto n \cdot x^{n-1}.$$

Da $f'(x) \neq 0$ für $x \neq 0$, folgt aus Satz 17.14, dass die Wurzelfunktion

$$\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty) : y \mapsto y^{\frac{1}{n}}$$

auf dem Intervall $(0, \infty)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\left(\sqrt[n]{\cdot}\right)' : (0, \infty) \to \mathbb{R} : y \mapsto \frac{1}{n \cdot \left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Im Falle von $n = 2$ erhalten wir insbesondere

$$\left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

Wir wollen nun noch zeigen, dass die Wurzelfunktion $\sqrt[n]{\cdot}$ in $a = 0$ in der Tat *nicht* differenzierbar ist!

Dazu betrachten wir die Nullfolge $\left(\frac{1}{k^n}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ und die zugehörigen Werte des Differenzenquotienten

$$\mathrm{Diff}_{\sqrt[n]{\cdot},0}\left(\frac{1}{k^n}\right) = \frac{\frac{1}{k} - 0}{\frac{1}{k^n} - 0} = k^{n-1} \longrightarrow \infty$$

für $k \longrightarrow \infty$, da $n \geq 2$. Also existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten in $a = 0$ nicht, und somit ist die Wurzelfunktion dort auch nicht differenzierbar.

Proposition 17.16 (Kettenregel – äußere Ableitung × innere Ableitung)
Es seien $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen mit* $\operatorname{Im}(f) \subseteq V$ *und es sei* $a \in U$. *Ist* f *differenzierbar in* a *und* g *differenzierbar in* $f(a)$, *so ist* $g \circ f$ *differenzierbar in* a *mit*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Beweis: Wir definieren auf V eine Funktion durch

$$h : V \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \begin{cases} \operatorname{Diff}_{g,f(a)}(y) = \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)}, & \text{falls } y \neq f(a), \\ g'(f(a)), & \text{falls } y = f(a). \end{cases}$$

Da g in $f(a)$ differenzierbar ist, gilt dann $\lim\limits_{y \to f(a)} h(y) = h(f(a))$, d.h. h ist stetig in $f(a)$. Außerdem gilt für alle $y \in V$

$$h(y) \cdot \big(y - f(a)\big) = g(y) - g\big(f(a)\big). \tag{26}$$

Wir beachten nun noch, dass nach Proposition 14.8 $\lim\limits_{x \to a} h(f(x)) = h(f(a)) = g'(f(a))$ gilt, da die Funktion h stetig in $f(a)$ und die Funktion f nach Satz 17.7 stetig in a ist. Damit erhalten wir dann, dass der Grenzwert

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \overset{(26)}{=} \lim_{x \to a} \frac{h(f(x)) \cdot (f(x) - f(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} h(f(x)) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(f(a)) \cdot f'(a)\end{aligned}$$

existiert. □

Beispiel 17.17
Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$$

lässt sich schreiben als $g \circ f$ mit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2 + 1$$

und $g = \sqrt{\cdot}$. Also ist h differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

in x.

C) Stetige Differenzierbarkeit

Abschließend wollen wir in diesem Abschnitt noch einige Begriffe einführen, die im folgenden nützlich sein werden.

Definition 17.18
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a. Wir nennen f *stetig differenzierbar*, wenn f differenzierbar auf U und f' stetig auf U ist.

b. Wir definieren die k-*fache Differenzierbarkeit* und die k-*te Ableitung* von f rekursiv. f heißt 1-*fach differenzierbar* auf U, wenn f auf U differenzierbar ist, und $f^{(1)} := f'$ heißt die *erste Ableitung* von f. Für $k > 1$ heißt f k-*fach differenzierbar*, wenn $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist, und $f^{(k)} := \left(f^{(k-1)}\right)'$ heißt dann die k-*te Ableitung* von f. Wir schreiben auch $f^{(0)} := f$, $f'' := f^{(2)}$ und $f''' := f^{(3)}$.

c. f heißt k-*fach stetig differenzierbar*, wenn f k-fach differenzierbar auf U und zudem $f^{(k)}$ stetig auf U ist. Mit

$$\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-fach stetig differenzierbar}\}$$

bezeichnen wir die Menge der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen auf U.

d. f heißt *unendlich oft differenzierbar* auf U, wenn $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ für alle $k \geq 1$. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist unendlich oft differenzierbar}\}$$

die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf U.

Beispiel 17.19

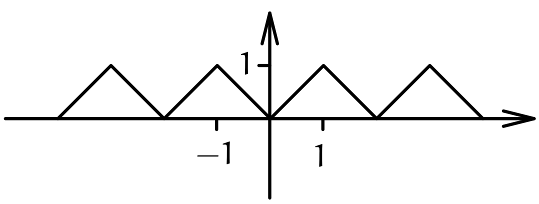
a. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, die Ableitung ist aber nicht stetig in $a = 0$. Der Beweis ist ein Übungsaufgabe, für die man unter anderem Korollar 18.21 benötigt.

b. Leitet man eine Polynomfunktion oder eine rationale Funktion ab, so erhält man wieder eine Polynomfunktion oder eine rationale Funktion mit dem jeweils gleichen Definitionsbreich. Da diese wieder differenzierbar sind, sehen wir, dass Polynomfunktionen und rationale Funktionen unendlich oft differenzierbar sind.

Bemerkung 17.20 (Überall stetig, nirgendwo differenzierbar)
Betrachte die periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Graph in folgendem Bild dargestellt ist.



Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(2^n \cdot x)}{2^n}$$

ist ein Beispiel für eine Funktion, die in jedem Punkt stetig und in keinem Punkt differenzierbar ist!

Aufgaben

Aufgabe 17.21
Für $n \in \{0, 1, 2\}$ sei

$$f_n : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x^n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Welche der Funktionen sind stetig in $a = 0$, differenzierbar in $a = 0$, stetig differenzierbar auf $[0, \infty)$?

Aufgabe 17.22 (Leibnitz-Regel)
Sei $n \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{C}^n(U, \mathbb{R})$ zwei n-fach differenzierbare Funktionen mit gleichem Definitionsbereich. Zeigen Sie:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Aufgabe 17.23
Mit $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$ sei die Abrundung der reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion

$$f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

schematisch, überprüfen Sie, an welchen Stellen die Funktion differenzierbar ist, und bestimme dort die Ableitung.

§ 18 Der Mittelwertsatz und seine Anwendungen

Definition 18.1 (Extremstellen)
Es sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in U$.

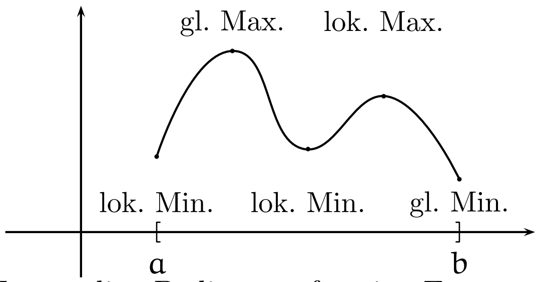
a. f hat in a ein *globales Maximum*, wenn $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U$.

b. f hat in a ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(a) \geq f(x)$ für alle $x \in U \cap U_\delta(a)$.

c. f hat in a ein *globales Minimum*, wenn $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in U$.

d. f hat in a ein *lokales Minimum*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in U \cap U_\delta(a)$.

e. a heißt *Extremstelle* und $f(a)$ *Extremum* von f, wenn f in a ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum hat.



Proposition 18.2 (Notwendige Bedingung für eine Extremstelle: $f'(c) = 0$)
Ist $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *in einer Extremstelle* c *differenzierbar, so ist* $f'(c) = 0$.

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß c ein lokales Maximum ist, da der Beweis für ein lokales Minimum dann durch Übergang von f zu $-f$ folgt.

Nach Definition gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(c) \geq f(x)$ für alle $x \in (a, b) \cap (c-\delta, c+\delta)$. Ersetzen wir δ durch $\min\{\delta, b-c, c-a\}$ so können wir annehmen, daß $(c-\delta, c+\delta) \subseteq (a, b)$. Wir betrachten nun die Folgen $(a_n)_{n\geq 2}$ und $(b_n)_{n\geq 2}$ mit

$$a_n := c - \frac{\delta}{n} < c$$

und

$$b_n := c + \frac{\delta}{n} > c.$$

Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ von links gegen c, und die Folge $(b_n)_{n\geq 2}$ konvergiert von rechts gegen c. Nun betrachten wir den Grenzwert des Differenzenquotienten von f in c für die beiden Folgen und berücksichtigen, daß stets $f(a_n) - f(c) \leq 0$ und $f(b_n) - f(c) \leq 0$ gilt und daß außerdem $a_n - c < 0$ und $b_n - c > 0$ gilt:

$$0 \leq \frac{f(a_n) - f(c)}{a_n - c} \longrightarrow f'(c)$$

und

$$0 \geq \frac{f(b_n) - f(c)}{b_n - c} \longrightarrow f'(c).$$

Für den Grenzwert $f'(c)$ gilt also

$$0 \leq f'(c) \leq 0,$$

und mithin

$$f'(c) = 0.$$

$\square$

Beispiel 18.3 a. Ist $n \geq 2$ gerade, so nimmt die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n$$

in $a = 0$ ein globales Minimum an, und es gilt auch

$$f'(0) = n \cdot 0^{n-1} = 0.$$

b. Die Funktion $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ hat in Null *keine* Extremstelle, da $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$, dennoch gilt $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Die Bedingung $f'(c) = 0$ für eine Extremstelle c ist also *notwendig*, aber sie ist *nicht hinreichend*.

Bemerkung 18.4
Selbst wenn f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert und dort überall differenzierbar ist, macht Proposition 18.2 *keine* Aussagen über die Ableitung in den *Randpunkten* a und b, falls diese Extremstellen sind!

Die Funktion $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3$ nimmt in $a = -1$ ihr globales Minimum und in $a = 1$ ihr globales Maximum an, aber die Ableitungen $f'(-1) = 3 = f'(1)$ sind beide nicht Null.

Satz 18.5 (Satz von Rolle)
Ist $a < b$ *und ist* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b) *mit* $f(a) = f(b)$*, so gibt es ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f'(c) = 0$.

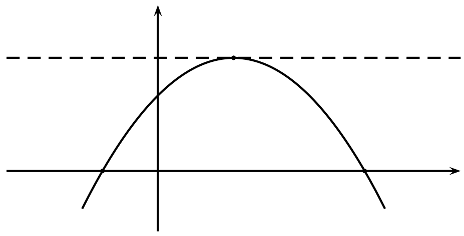
Beweis: Ist f konstant auf dem Intervall $[a, b]$ so ist $f'(c) = 0$ für jedes $c \in (a, b)$. Wir können also annehmen, daß es ein $y \in (a, b)$ mit $f(y) \neq f(a) = f(b)$ gibt.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $f(y) > f(a) = f(b)$ gilt. Da f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist, nimmt f dort nach Satz 14.16 sein Maximum an, d.h. es gibt ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. c ist also eine Extremstelle, und wegen $f(y) > f(a) = f(b)$, muß $c \in (a, b)$ gelten, so daß wir Proposition 18.2 anwenden können und $f'(c) = 0$ erhalten.

Der Fall $f(y) < f(a) = f(b)$ geht analog, da dann ein globales Minimum von f in (a, b) existiert. $\square$

Bemerkung 18.6
Der Satz von Rolle besagt insbesondere, daß die Ableitung zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion mindestens einmal Null werden muß, und im Beweis

haben wir gesehen, daß das daran liegt, daß die Funktion dort eine Extremstelle besitzt.



Satz 18.7 (Mittelwertsatz)
Ist $a < b$ *und ist* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b)*, so gibt es ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis: Die Funktion

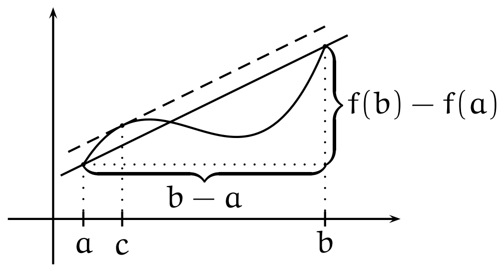
$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

ist stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Außerdem gilt $g(a) = f(a) = g(b)$. Aus dem Satz von Rolle 18.5 folgt die Existenz eines $c \in (a, b)$ mit

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Bemerkung 18.8
Der Mittelwertsatz besagt, daß zwischen a und b ein c liegt, in dem die Steigung der Tangente $t_{f,c}$ an den Graphen von f mit der Steigung der Sekante $s_{f,a,b}$ durch a und b übereinstimmt.



Beispiel 18.9
Betrachten wir die Funktion

$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3.$$

Aus dem Mittelwertsatz folgt, daß es ein $c \in (-1, 1)$ geben muß, so daß die Tangente an den Graphen von f im Punkt (c, c^3) die Steigung

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2}{2} = 1$$

hat. Da wir die Ableitungsfunktion kennen, können wir versuchen, c zu bestimmen. Es muß gelten

$$1 = f'(c) = 3 \cdot c^2.$$

Wir finden also zwei solcher Stellen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad c = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Korollar 18.10 (Allgemeiner Mittelwertsatz)
Ist $a < b$ *und sind* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b)*, so gibt es ein* $c \in (a, b)$ *mit* $f'(c) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) = g'(c) \cdot \big(f(b) - f(a)\big)$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) - g(x) \cdot (f(b) - f(a)\big).$$

h ist auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit

$$h(a) = f(a) \cdot g(b) - g(a) \cdot f(b) = h(b).$$

Aus dem Satz von Rolle folgt, daß es ein $c \in (a, b)$ gibt mit

$$0 = h'(c) = f'(c) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) - g'(c) \cdot \big(f(b) - f(a)\big).$$

□

Wir wollen uns nun den Anwendungen des Mittelwertsatzes zuwenden.

A) Konstante Funktionen

Proposition 18.11
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b) *mit* $f'(x) = 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*, dann ist* f *eine konstante Funktion.*

Beweis: Sei $x \in (a, b]$, so ist f stetig auf $[a, x]$ und differenzierbar auf (a, x). Aus dem Mittelwertsatz folgt dann, daß es ein $c \in (a, x)$ gibt mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) = 0.$$

Also gilt $f(x) = f(a)$, und dies gilt für alle $x \in (a, b]$. □

B) Monotonie und Ableitung

Mit Hilfe der Ableitung läßt sich bei differenzierbaren Funktionen ein hinreichendes Kriterium für Monotonie angeben.

Proposition 18.12 (Hinreichendes Kriterium für Monotonie)
Es sei $a < b$ *und* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* (a, b).

a. *Ist* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*, so ist* f *streng monoton wachsend auf* $[a, b]$.
b. *Ist* $f'(x) < 0$ *für alle* $x \in (a, b)$*, so ist* f *streng monoton fallend auf* $[a, b]$.

Beweis: a. Es seien $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ gegeben. Dann ist f stetig auf $[x, y]$ und differenzierbar auf (x, y). Aus dem Mittelwertsatz folgt deshalb, daß es ein $c \in (x, y)$ gibt mit

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x) > 0.$$

Also ist f streng monoton wachsend.

b. Der Beweis geht analog zum ersten Teil.

□

Beispiel 18.13
Betrachte für $n \geq 1$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n.$$

Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} > 0$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Mithin ist die Funktion streng monoton wachsend auf jedem Intervall $[0, b] \subseteq [0, \infty)$ und mithin auf $[0, \infty)$. Dies ist ein alternativer Beweis der Aussage in Beispiel 14.19.

C) Hinreichende Bedingung für Extremstellen

Proposition 18.14 (Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle)
Es sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine zweifach differenzierbare Funktion und* $c \in (a, b)$.

a. *Falls* $f'(c) = 0$ *und* $f''(c) < 0$, *so ist* c *ein lokales Maximum.*
b. *Falls* $f'(c) = 0$ *und* $f''(c) > 0$, *so ist* c *ein lokales Minimum.*

Beweis:

b. Nach Voraussetzung ist

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = f''(c) > 0.$$

Zu $\varepsilon := \frac{f''(c)}{2} > 0$ gibt es dann ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß

$$-\frac{f''(c)}{2} = -\varepsilon < \frac{f'(x)}{x - c} - f''(c) < \varepsilon = \frac{f''(c)}{2}$$

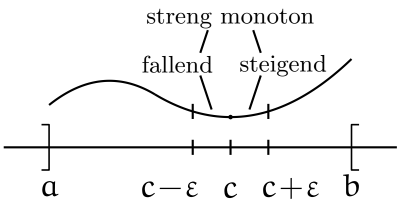
für alle $x \in (a, b)$ mit $|x - c| < \delta_\varepsilon$. Insbesondere folgt für diese x dann

$$\frac{f'(x)}{x - c} > -\frac{f''(c)}{2} + f''(c) = \frac{f''(c)}{2} > 0. \tag{27}$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß δ_ε so klein ist, daß $a < c - \delta_\varepsilon < c + \delta_\varepsilon < b$ gilt.
Für $x \in (c - \delta_\varepsilon, c)$ folgt aus (27) dann $f'(x) < 0$, und nach Proposition 18.12 ist f dann streng monoton fallend auf dem Intervall $[c - \delta_\varepsilon, c]$.

Analog folgt für $x \in (c, c+\delta_\varepsilon)$ aus (27) $f'(x) > 0$ und aus Proposition 18.12 folgt, daß f streng monoton wachsend auf dem Intervall $[c, c+\delta_\varepsilon]$ ist.

Insbesondere heißt das, daß $f(c) \leq f(x)$ für alle $x \in [c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon]$, so daß f in c ein Minimum besitzt.



a. Die Aussage beweist man analog.

□

Beispiel 18.15
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1.$$

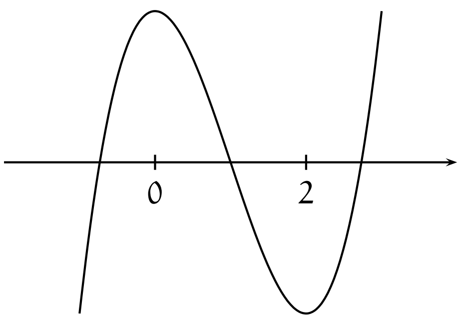
Um mögliche Extremstellen zu finden, müssen wir die Nullstellen der ersten Ableitung

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

finden. Das ist für $x = 0$ und $x = 2$ der Fall. In diesen Punkten schauen wir uns die zweite Ableitung

$$f''(x) = 6x - 6$$

an. Aus $f''(0) = -6 < 0$ folgt, daß in $x = 0$ ein Maximum vorliegt, und aus $f''(2) = 6 > 0$ folgt, daß in $x = 2$ ein Minimum vorliegt.



Bemerkung 18.16 (Hinreichende Bedingung für Extremstellen)
Anstatt zweifacher Differenzierbarkeit und der Bedingung an die zweite Ableitung kann man auch einfach fordern, daß die erste Ableitung in c einen Vorzeichenwechsel hat, wie wir ihn im Beweis von Proposition 18.14 aus den Bedingungen an $f''(c)$ ableiten.

D) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung

Satz 18.17 (Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung)
Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Funktionenfolge stetig differenzierbarer Funktionen auf dem Intervall* $[a,b]$*, so daß* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise gegen* f *und* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen* g *konvergiert, dann ist* f *stetig differenzierbar auf* $[a,b]$ *mit Ableitung* $f' = g$*.*

Beweis: Nach Voraussetzung sind die f'_n stetig auf $[a,b]$, so daß die Grenzfunktion g als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen nach Satz 15.6 ebenfalls stetig ist.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $c \in [a,b]$ gegeben, so müssen wir ein $\delta_\varepsilon > 0$ finden, so daß für alle $c \neq x \in [a,b]$ mit $|x-c| < \delta_\varepsilon$ auch

$$|\operatorname{Diff}_{f,c}(x) - g(c)| = \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| < \varepsilon$$

gilt, d.h. $g(c)$ ist der Grenzwert des Differenzenquotienten von f in c.

Da $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergiert, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f'_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{28}$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$ und alle $x \in [a,b]$ gilt.

Da g stetig in c ist, gibt es zudem ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß für alle $x \in [a,b]$ mit $|x-c| < \delta_\varepsilon$ auch

$$|g(x) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{29}$$

gilt.

Sei nun $c \neq x \in [a,b]$ mit $|x-c| < \delta_\varepsilon$ gegeben. Für $n \geq n_\varepsilon$ können wir den Mittelwertsatz 18.7 auf die differenzierbare Funktion f_n anwenden und finden somit ein y zwischen x und c mit

$$\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} = f'_n(y) \tag{30}$$

und da y zwischen x und c liegt, gilt auch $|y-c| \leq |x-c| < \delta_\varepsilon$.

Setzen wir die obigen Ergebnisse nun zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - g(c)\right| &\overset{(30)}{=} |f'_n(y) - g(c)| \\ &\leq |f'_n(y) - g(y)| + |g(y) - g(c)| \\ &\overset{(28)(29)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\cdot\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$. Lassen wir nun n gegen unendlich laufen, so erhalten wir für den Grenzwert

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - g(c)\right| \leq \frac{2\cdot\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, daß f in einem beliebigen Punkt c des Intervalls $[a, b]$ differenzierbar ist und daß $f' = g$ gilt. Da wir bereits wissen, daß g stetig ist, ist f mithin stetig differenzierbar auf $[a, b]$. $\square$

Bemerkung 18.18

a. Die Aussage in Satz 18.17 besagt, daß

$$\lim_{n\to\infty}(f_n') = \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)',$$

d.h. die Grenzwertbildung für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vertauscht mit der Ableitung!

Auf die Differenzenquotienten zurückgeführt, bedeutet dies

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a}\frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(x)-f_n(a)}{x-a}.$$

Hier vertauschen zwei Grenzwertprozesse! Das ist eine Besonderheit!

b. Man kann in Satz 18.17 auf die Bedingung, daß die Ableitungen f_n' stetig sind, verzichten. Der Beweis wird dann aber etwas technischer.

c. Auch wenn wir in Satz 18.17 nur die punktweise Konvergenz für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefordert haben, erzwingt die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ letztlich die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis der Aussagen b. und c. Wir verwenden die Notation und die Voraussetzungen von Satz 18.17, verzichten aber auf die Bedingung, daß die f_n' stetig sind!

Zu Teil b.: f ist differenzierbar mit $f' = g$: Dazu definieren wir uns für ein fest gegebenes $c \in [a, b]$ die Funktionenfolge

$$h_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} - f_n'(c), & \text{falls } x \neq c,\\ 0, & \text{falls } x = c. \end{cases}$$

Da die f_n in c differenzierbar sind, ist die Funktion h_n stetig in c. In den übrigen Punkten von $[a, b]$ ist die Funktion aber ohnehin stetig, da die f_n als differenzierbare Funktionen auch stetig sind nach Satz 17.7.

Wir wollen zeigen, daß die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen die Funktion

$$h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} - g(c), & \text{falls } x \neq c,\\ 0, & \text{falls } x = c \end{cases}$$

konvergiert. Die punktweise Konvergenz von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen h ist klar, da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise gegen g konvergiert.

Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ finden, so daß

$$|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$ und $x \in [a, b]$ gilt. Wegen $h_n(c) = 0 = h(c)$ können wir uns dazu ein $c \neq x \in [a, b]$ vorgeben.

Da die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergiert, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f'_n(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{6}$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$ und $y \in [a, b]$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir dann

$$|f'_m(y) - f'_n(y)| \leq |f'_m(y) - g(y)| + |g(y) - f'_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{31}$$

für alle $m > n \geq n_\varepsilon$ und $y \in [a, b]$.

Wenden wir nun den Mittelwertsatz 18.7 auf die differenzierbare Funktion $f_m - f_n$ für $m > n \geq n_\varepsilon$ an, so finden wir ein y zwischen x und c mit

$$\frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} = (f'_m - f'_n)(y) \tag{32}$$

Für $m > n \geq n_\varepsilon$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
|h_m(x) - h_n(x)| &= \left|\frac{f_m(x) - f_m(c)}{x - c} - f'_m(c) - \frac{f_n(x) - f_n(c)}{x - c} + f'_n(c)\right| \\
&= \left|\frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(c)}{x - c} - (f'_m(c) - f'_n(c))\right| \\
&\overset{(32)}{=} |(f'_m(y) - f'_n(y)) - (f'_m(c) - f'_n(c))| \\
&\leq |f'_m(y) - f'_n(y)| + |f'_m(c) - f'_n(c)| \\
&\overset{(31)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2 \cdot \varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Lassen wir nun m gegen unendlich gehen, erhalten wir für den Grenzwert

$$|h(x) - h_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |h_m(x) - h_n(x)| \leq \frac{2 \cdot \varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Damit haben wir gezeigt, daß $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen h konvergiert. Als gleichmäßige Grenzfunktion stetiger Funktionen ist h damit nach Satz 15.6 stetig auf $[a, b]$, und insbesondere stetig in c. D.h.

$$\lim_{x\to c} \mathrm{Diff}_{f,c}(x) - g(c) = \lim_{x\to c} h(x) = h(c) = 0,$$

also ist f in c differenzierbar mit $f'(c) = g(c)$.

Zu Teil c.: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ finden, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$ und alle $x \in [a, b]$ gilt.

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, ist insbesondere die Folge $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und wir finden ein n'_ε, so daß für alle $m > n \geq n'_\varepsilon$

$$|f_m(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{33}$$

Da die Folge $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergiert, finden wir zudem ein n''_ε, so daß

$$|f'_n(y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} \tag{34}$$

für alle $y \in [a, b]$ und $n \geq n''_\varepsilon$ gilt.

Wir betrachten nun ein beliebiges $x \in [a, b]$ und beliebige $m > n \geq n_\varepsilon := \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$. Wenden wir den Mittelwertsatz 18.7 auf die differenzierbare Funktion $f_m - f_n$ an, so finden wir ein $y \in [a, x] \subseteq [a, b]$ mit

$$(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(a) = (f'_m - f'_n)(y) \cdot (x - a). \tag{35}$$

Diese Gleichung wollen wir nun ausnutzen, um die Differenz $f_m(x) - f_n(x)$ für $x \in [a, b]$ und $m > n \geq n_\varepsilon$ abzuschätzen:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(a)| + |f_m(a) - f_n(a)| \\ &\overset{(35)}{=} |f'_m(y) - f'_n(y)| \cdot |x - a| + |f_m(a) - f_n(a)| \\ &\overset{(33)}{<} \big(|f'_m(y) - g(y)| + |g(y) - f'_n(y)|\big) \cdot |b - a| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\overset{(34)}{<} \left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)} + \frac{\varepsilon}{4 \cdot (b - a)}\right) \cdot (b - a) + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3 \cdot \varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Halten wir n fest und betrachten $m \to \infty$, so erhalten wir für den Grenzwert

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m \to \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{3 \cdot \varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

und dies gilt für jedes $n \geq n_\varepsilon$ und jedes $x \in [a, b]$.

□

E) Ableitung von Potenzreihen

Korollar 18.19 (Ableitung von Potenzreihen)
Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$, dann ist die Funktion

$$f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

differenzierbar auf $(-r, r)$ und die Ableitung in $x \in (-r, r)$ ist gegeben durch

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1},$$

d.h. durch die formale Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ der Potenzreihe.

Beweis: Aus Aufgabe 12.43 wissen wir, daß die beiden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ und ihre formale Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius r besitzen. Insbesondere definiert letztere Reihe eine Funktion

$$g : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1},$$

die nach Korollar 15.7 stetig ist.

Sei nun $a \in (-r, r)$ gegeben. Wir wollen zeigen, daß f in a differenzierbar ist mit

$$f'(a) = g(a).$$

Dazu setzen wir $R := \frac{r+|a|}{2} < r$, so daß $a \in (-R, R)$ liegt. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

konvergiert nach Satz 15.4 auf dem abgeschlossenen Intervall $[-R, R]$ gleichmäßig gegen die Funktion f. Nach Beispiel 17.10 sind die f_n differenzierbar mit stetiger Ableitung

$$f_n' : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}.$$

Die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ der Ableitungen konvergiert dann wieder nach Satz 15.4 auf $[-R, R]$ gleichmäßig gegen g. Da die Voraussetzungen von Satz 18.17 erfüllt sind, ist f auf $[-R, R]$ differenzierbar mit $f' = g$. Insbesondere ist f also in a differenzierbar mit $f'(a) = g(a)$. □

Da wir die Aussage des Korollars auch auf die formale Ableitung der Potenzreihe anwenden können, erhalten wir durch Induktion die folgende Aussage.

Korollar 18.20 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)
Eine durch eine Potenzreihe definierte Funktion ist auf ihrem Konvergenzbereich unendlich oft differenzierbar.

Die Exponentialfunktion, der Sinus und der Cosinus sind also differenzierbar.

Korollar 18.21 (Ableitungen wichtiger Funktionen)

a. *Die Exponentialfunktion*

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ *mit Ableitung*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

b. *Der Sinus*

$$\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ *mit Ableitung*

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

c. *Der Cosinus*

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

ist unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ *mit Ableitung*

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

d. *Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Exponentialfunktion zur Basis a*

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \exp\big(x \cdot \ln(a)\big)$$

stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x).$$

e. *Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a \neq 1$ ist die Logarithmusfunktion zur Basis a*

$$\log_a : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit Ableitung

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}.$$

Insbesondere gilt für die Ableitung des natürlichen Logarithmus

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

f. *Der Tangens*

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

ist auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

g. *Der Cotangens*

$$\cot : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

ist stetig differenzierbar auf $(0, \pi)$ mit Ableitung

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

h. *Der Arcustangens ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

i. *Der Arcuscotangens ist auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit*

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

j. *Der Arcussinus ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar mit*

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

k. *Der Arcuscosinus ist auf $(-1, 1)$ differenzierbar mit*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Beweis:

a. exp ist nach Korollar 18.19 und 18.20 unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

b. sin ist nach Korollar 18.19 und 18.20 unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$\sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \cdot \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x).$$

c. cos ist nach Korollar 18.19 und 18.20 unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n) \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(x).\end{aligned}$$

d. Aus der Kettenregel erhalten wir, daß die Exponentialfunktion zur Basis a differenzierbar ist mit Ableitung

$$\exp_a'(x) = \ln(a) \cdot \exp_a(x),$$

und diese Funktion ist offenbar wieder stetig.

e. Aus dem Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen 17.14 folgt, daß $\log_a$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar ist, da die Ableitung der Exponentialfunktion $\exp_a$ nie Null wird. Für die Ableitung erhalten wir zudem

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot \exp_a(\log_a(x))} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}.$$

Zudem ist die Ableitung offenbar stetig.

f. Aus der Quotientenregel erhalten wir, daß der Tangens in $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ differenzierbar ist mit

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot \cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

Als Quotient stetiger Funktionen ist die Ableitung insbesondere stetig.

g. Aus der Quotientenregel erhalten wir, daß der Cotangens in $x \in (0, \pi)$ differenzierbar ist mit

$$\cot'(x) = \frac{\cos'(x) \cdot \sin(x) - \cos(x) \cdot \sin'(x)}{\sin(x)^2} = \frac{-\cos(x)^2 - \sin(x)^2}{\sin(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2}.$$

Als Quotient stetiger Funktionen ist die Ableitung insbesondere stetig.

h. Aus dem Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen 17.14 zusammen mit Satz 16.18 folgt, daß arctan auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, da die Ableitung des Tangens nie Null wird auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Für die Ableitung erhalten wir zudem

$$\begin{aligned}\arctan'(x) =& \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}}\\ =& \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x))+\cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}+1}\\ =& \frac{1}{\tan(\arctan(x))^2+1} = \frac{1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Die Ableitung ist zudem offenbar stetig.

i. Aus dem Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen 17.14 zusammen mit Satz 16.18 folgt, daß arccot auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, da die Ableitung des Cotangens nie Null wird auf $(0, \pi)$. Für die Ableitung erhalten wir zudem

$$\begin{aligned}\operatorname{arccot}'(x) =& \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot}(x))} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccot}(x))}}\\ =& -\frac{1}{\frac{\sin^2(\operatorname{arccot}(x))+\cos^2(\operatorname{arccot}(x))}{\sin^2(\operatorname{arccot}(x))}} = -\frac{1}{1+\frac{\cos^2(\operatorname{arccot}(x))}{\sin^2(\operatorname{arccot}(x))}}\\ =& -\frac{1}{1+\cot(\operatorname{arccot}(x))^2} = -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Die Ableitung ist zudem offenbar stetig.

j. Aus dem Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen 17.14 zusammen mit Satz 16.18 folgt, daß arcsin auf $(-1, 1)$ differenzierbar ist, da die Ableitung des Sinus nie Null wird auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Für die Ableitung erhalten wir zudem unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Cosinus auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ positiv ist:

$$\begin{aligned}\arcsin'(x) =& \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\\ =& \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}\\ =& \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Die Ableitung ist zudem offenbar stetig.

k. Aus dem Satz zur Ableitung von Umkehrfunktionen 17.14 zusammen mit Satz 16.18 folgt, daß arccos auf $(-1, 1)$ differenzierbar ist, da die Ableitung des Cosinus nie Null wird auf $(0, \pi)$. Für die Ableitung erhalten wir zudem unter

Berücksichtigung der Tatsache, daß der Sinus auf $(0, \pi)$ positiv ist:

$$\begin{aligned}\arccos'(x) =& \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} \\ =& -\frac{1}{\sqrt{\sin^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} \\ =& -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Die Ableitung ist zudem offenbar stetig.

□

Bemerkung 18.22

Schaut man sich die Ableitungen der Funktionen in Korollar 18.21 d.-k. an, so kann man leicht durch Induktion zeigen, daß jede der Funktionen auf ihrem Definitionsbereich unendlich oft differenzierbar ist.

Beispiel 18.23

Für $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^a$$

unendlich oft differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1}.$$

Um dies zu sehen, beachten wir, daß $f(x) = \exp(a \cdot \ln(x))$ gilt, so daß f nach Korollar 18.21 die Verkettung zweier differenzierbarer Funktionen ist. Aus der Kettenregel 17.16 folgt dann

$$f'(x) = \exp'\big(a \cdot \ln(x)\big) \cdot \frac{a}{x} = \exp\big(a \cdot \ln(x)\big) \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

Daß f sogar unendlich oft differenzierbar ist, folgt dann mit Induktion aus der Tatsache, daß f' eine Funktion der gleichen Gestalt ist.

F) Die Regeln von de l'Hôpital

Im folgenden Satz soll $[-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ bezeichnen.

Satz 18.24 (Regeln von de l'Hôpital)

Seien $a, b \in [-\infty, \infty]$ *mit* $a < b$, $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar und* $c \in [a, b]$. *Ferner gelte* $g'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in (a, b)$ *und* $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiere eigentlich oder uneigentlich.*

a. *Falls* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$, *so gilt* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
b. *Falls* $\lim_{x\to c} g(x) \in \{\infty, -\infty\}$, *so gilt* $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Beweis: Wir beschränken uns im Beweis auf den Fall $c \in \mathbb{R}$ und $k := \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$. Die Fälle $c \in \{-\infty, \infty\}$ oder $k \in \{-\infty, \infty\}$ beweist man analog.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so müssen wir ein $\delta_\varepsilon > 0$ finden, so daß

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon \tag{36}$$

für alle $c \neq x \in (a, b)$ mit $|x - c| < \delta_\varepsilon$.

Da $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ gegen k konvergiert für x gegen c, gibt es ein $\delta'_\varepsilon > 0$, so daß für alle $z \in (a, b)$ mit $|z - c| < \delta'_\varepsilon$ auch

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{37}$$

gilt.

Wir betrachten nun $c \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta'_\varepsilon, c + \delta'_\varepsilon)$ mit $x \neq y$ und wenden den allgemeinen Mittelwertsatz 18.10 an. Dann gibt es ein z zwischen x und y mit

$$f'(z) \cdot \big(g(x) - g(y)\big) = g'(z) \cdot \big(f(x) - f(y)\big). \tag{38}$$

Da z zwischen x und y liegt, gilt auch

$$z \in (a, b) \cap (c - \delta'_\varepsilon, c + \delta'_\varepsilon). \tag{39}$$

Nach Voraussetzung ist $g'(z) \neq 0$, und wir behaupten, daß auch $g(x) - g(y) \neq 0$ gilt, da es nach dem Satz von Rolle 18.5 sonst ein w zwischen x und y geben würde mit $g'(w) = 0$, was aber nach Voraussetzung nicht möglich ist. Damit können wir Gleichung (38) auch in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}. \tag{40}$$

a. Wir betrachten nun den Fall, daß $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$. Ist $c \in (a, b)$, so folgt aus der Stetigkeit von f und g automatisch $f(c) = 0 = g(c)$. Ist $c \notin (a, b)$, so können wir f und g in c stetig fortsetzen durch $f(c) = 0 = g(c)$.
   Aus (37), (39) und (40) folgt

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k \right| = \left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - k \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

   und dies gilt für alle $c \neq x, y \in (a, b) \cap (c - \delta'_\varepsilon, c + \delta'_\varepsilon)$ mit $x \neq y$. Da die Funktionen f und g nun stetig in c mit Funktionswert 0 sind, können wir y gegen c gehen lassen und erhalten im Grenzwert

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| = \left| \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - k \right| = \lim_{y \to c} \left| \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

   Dies gilt für alle $c \neq x \in (a, b) \cap (c - \delta'_\varepsilon, c + \delta'_\varepsilon)$, so daß wir mit $\delta_\varepsilon := \delta'_\varepsilon$ unsere Aussage in diesem Fall bewiesen haben.

b. Wir können annehmen, daß f nicht konstant 0 in einer kleinen Umgebung von c ist, da sonst auch $k = 0$ gilt und (36) sicher erfüllt ist. Deshalb können wir ein $c \neq y \in (a,b) \cap (c - \delta'_\varepsilon, c + \delta'_\varepsilon)$ festhalten mit $f(y) \neq 0$, und wegen $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ können wir auch $g(y) \neq 0$ annehmen.
Aus $\lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$ folgt $\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$, und deshalb gibt es ein $\delta''_\varepsilon > 0$, so daß

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot |f(y)|} \tag{41}$$

für alle $x \in (a,b) \cap (c - \delta''_\varepsilon, c + \delta''_\varepsilon)$ mit $x \neq c, y$.
Aus (37), (39) und (40) folgt, daß

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\right| \leq \left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k\right| + |k| < \frac{\varepsilon}{2} + |k| =: s \tag{42}$$

für alle $x \in (a,b) \cap (c - \delta'_\varepsilon, c + \delta'_\varepsilon)$ mit $x \neq c, y$, d.h. der Ausdruck ist auf dem angegebenen Intervall nach oben beschränkt.
Wegen $\lim_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = 0$ gibt es ein $\delta'''_\varepsilon > 0$ mit

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{4 \cdot |g(y)| \cdot s} \tag{43}$$

für alle $x \in (a,b) \cap (c - \delta'''_\varepsilon, c + \delta'''_\varepsilon)$ mit $x \neq c, y$.
Nun setzen wir $\delta_\varepsilon := \min\{\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon, \delta'''_\varepsilon, |y - c|\}$ und betrachten ein beliebiges $c \neq x \in (a,b) \cap (c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon)$. (36) gilt dann auch in diesem Fall wegen

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| &= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x)} - k\right| \\
&= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(x) - g(y)}{g(x)} - k\right| \\
&= \left|\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k\right| \\
&\leq \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \cdot \frac{g(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k\right| \\
&= \underbrace{\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right|}_{\overset{(41)}{<} \frac{\varepsilon}{4}} + \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}\right|}_{\overset{(42)}{\leq} s} \cdot \underbrace{\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|}_{\overset{(43)}{<} \frac{\varepsilon}{4\cdot s}} + \underbrace{\left|\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} - k\right|}_{\overset{(37)(39)(40)}{<} \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 18.25 (Die Regeln von de l'Hôpital)

a. Im Beweis von Satz 18.24 haben wir gesehen, daß die Funktion g auf dem Intervall $[a,b]$ keinen Wert *zweimal* annehmen kann, da wegen des Satzes von Rolle 18.5 die Ableitung ansonsten auch einmal Null würde. Insbesondere zeigt das, daß g höchstens eine Nullstelle haben kann! Die Bedingung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ erzwingt also, daß auch $g(x)$ im wesentlichen ungleich Null ist.

b. Ist g' stetig, so muß g' auf (a,b) entweder stets positiv oder stets negativ sein. Aus Proposition 18.12 folgt dann, daß g *streng monoton* auf dem Intervall (a,b) sein muß. Das zeigt, für welchen Typ von Funktionen g man die Regeln von de l'Hôpital überhaupt nur anwenden kann!

c. Man beachte, daß die zweite Regel von de l'Hôpital 18.24 nur in der Situation $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, d.h.

$$\frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

interessant ist, um den Grenzwert $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu bestimmen, da für $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k \in \mathbb{R}$ schon aus den normalen Grenzwertsätzen

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} = \frac{k}{\pm\infty} = 0$$

folgen würde!

Beispiel 18.26

a. Wir betrachten die Funktionen $f = \sin$ und $g = \sqrt{\cdot}$ auf dem Intervall $(0,\infty)$. Dort sind beide differenzierbar mit

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

und

$$g'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}} \neq 0$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Aus der ersten Regel von de l'Hôpital 18.24 folgt dann

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \cos(x)\cdot 2\cdot\sqrt{x} = \cos(0)\cdot 2\cdot\sqrt{0} = 0.$$

b. Wir betrachten die Funktionen

$$\ln : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$g : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty) : x \mapsto x^a = \exp\big(a\cdot\ln(x)\big)$$

für ein festes $a \in \mathbb{R}_{>0}$. Nach Korollar 18.21 und Beispiel 18.23 sind beide Funktionen differenzierbar auf $(0,\infty)$.

Da sowohl $\exp(x)$, als auch $\ln(x)$ für $x \to \infty$ gegen ∞ divergieren und da a positiv ist, folgt aus den Grenzwertsätzen für uneigentliche Grenzwerte 13.17

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \exp\big(a\cdot\ln(x)\big) = \infty.$$

Außerdem gilt nach Beispiel 18.23

$$g'(x) = a\cdot x^{a-1} \neq 0$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Aus der zweiten Regel von de l'Hôpital 18.24 folgt dann

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{a \cdot x^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a \cdot g(x)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Korollar 18.27 (Wachstum der Exponentialfunktion)
Die Exponentialfunktion wächst schneller als jede Polynomfunktion, d.h. ist $f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$ *ein Polynom über* $\mathbb{R}$, *so gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = 0.$$

Beweis: Wir bezeichnen die zu f gehörige Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$$

wieder mit f. Dann ist f differenzierbar und die Ableitung von f ist die Polynomfunktion zum Polynom

$$f' = \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot t^{k-1}.$$

Ist $f = a_0$ konstant, so folgt die Aussage aus den Grenzwertsätzen,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = \frac{a_0}{\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x)} = 0,$$

da $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$.

Für ein allgemeines Polynom $f \neq 0$ führt man den Beweis am besten durch Induktion nach dem Grad n des Polynoms. Den Fall $n = 0$ haben wir bereits betrachtet. Ist $n \neq 0$, so können wir die zweite Regel von de l'Hôpital 18.24 anwenden, da $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und da $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ gilt. Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\exp'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\exp(x)},$$

aber die rechte Seite ist dann Null nach Induktion. □

G) Der Satz von Taylor

Definition 18.28 (Taylorpolynome)
Es sei $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$.

Ist f n-fach differenzierbar, so nennen wir das Polynom

$$T_{f,a}^n := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$$

das n-te *Taylorpolynom* von f mit Entwicklungspunkt a.

Ist f unendlich oft differenzierbar, so nennen wir die Potenzreihe

$$T_{f,a} := \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t-a)^k$$

die *Taylorreihe* von f mit Entwicklungspunkt a oder die *Taylor-Entwicklung* von f im Punkt a. Beachte, stets gilt $T^n_{f,a}(a) = T_{f,a}(a) = f(a)$.

Bemerkung 18.29 (Tangenten und das 1. Taylorpolynome)
Ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\big(a, f(a)\big)$ gegeben durch

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a) = T^1_{f,a}(x).$$

D.h. das erste Taylorpolynom von f mit Entwicklungspunkt a ist die optimale lineare Approximation der Funktion f lokal in a.

Die Idee ist nun, daß mit steigendem n die Taylorpolynome $T^n_{f,a}$ immer bessere Approximationen von f lokal in a sein werden, und daß im Grenzwert dann die Taylorreihe vielleicht sogar mit f übereinstimmt. Das wird nicht immer aber doch oft der Fall sein – siehe Beispiel 18.31! Funktionen, für die das gilt, nennt man *analytisch* in a.

Man kann die Theorie der Differenzierbarkeit statt für Funktionen auf $\mathbb{R}$ auch für Funktionen auf $\mathbb{C}$ einführen. In der Vorlesung Einführung in die Funktionentheorie wird das getan, und dort zeigt man, daß über $\mathbb{C}$ jede einmal auf $\mathbb{C}$ differenzierbare Funktion schon analytisch ist, d.h. durch eine Potenzreihe gegeben und damit unendlich oft differenzierbar ist! Die komplexen Zahlen verhalten sich also weit unkomplizierter als die reellen Zahlen.

Beispiel 18.30 (Potenzreihen als Taylorreihen)
Ist $\sum_{n=0}^\infty a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe auf $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius $r > 0$, so ist die Funktion

$$f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n \cdot x^n$$

nach Korollar 18.20 unendlich oft differenzierbar, und mittels Induktion nach n zeigt man, daß

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n.$$

Damit stimmt f also mit seiner Taylorreihe

$$T_{f,0} = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot t^n = \sum_{n=0}^\infty a_n \cdot t^n$$

auf dem Konvergenzbereich $(-r, r)$ überein, und die Taylorpolynome

$$T^n_{f,0} = \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k$$

definieren eine Folge von Funktionen, die auf jedem abgeschlossenen Intervall $[-R, R] \subseteq (-r, r)$ gleichmäßig gegen f konvergieren.

Beispiel 18.31
Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Insbesondere ist die Taylorreihe von f also Null,

$$T_{f,0} = 0.$$

In diesem Fall stimmt die Taylorreihe also nur im Punkt $x = 0$ mit der Funktion überein, da $f(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$. Der Beweis ist Aufgabe 18.37.

Der Satz von Taylor sagt etwas darüber aus, wie gut das n-te Taylorpolynom f approximiert.

Satz 18.32 (Satz von Taylor – Restglied nach Lagrange)
Sei I *ein Intervall,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine* $n+1$*-fach differenzierbare Funktion und* $x, a \in I$. *Dann gibt es ein* c *zwischen* x *und* a*, so daß*

$$f(x) - T^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Wir nennen die rechte Seite auch das Restglied *des* n*-ten Taylorpolynoms.*

Beweis: Wir können ohne Einschränkung $x > a$ annehmen.

Dann definieren wir eine reelle Zahl

$$z := \frac{\big(f(x) - T^n_{f,a}(x)\big) \cdot (n+1)!}{(x-a)^{n+1}} \in \mathbb{R}$$

und eine Funktion $g : [a, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} g(y) :=& f(x) - T^n_{f,y}(x) - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \\ =& f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \\ =& f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-y)^{n+1} \end{aligned}$$

für $y \in [a, x]$ — man beachte hier, daß g eine Funktion in der Veränderlichen y ist, während x konstant ist!

Nach Voraussetzung ist f $n+1$-fach differenzierbar auf I, so daß die Funktion g differenzierbar auf $[a, x]$ ist, und mit Hilfe der Produktregel erhalten wir für die

Ableitung

$$
\begin{aligned}
g'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{k!} \cdot k \cdot (x-y)^{k-1} \right) + \frac{z \cdot (n+1)}{(n+1)!} \cdot (x-y)^n \\
&= -f'(y) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!} \cdot (x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!} \cdot (x-y)^{k-1} \right) + \frac{z}{n!} \cdot (x-y)^n \\
&= -f'(y) - \left(\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n - f'(y) \right) + \frac{z}{n!} \cdot (x-y)^n \\
&= \frac{z}{n!} \cdot (x-y)^n - \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n = \frac{z - f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n,
\end{aligned}
$$

wobei wir beachten, daß die Summe in der zweiten Zeile eine Teleskopsumme ist, so daß nur die Randsummanden übrig bleiben.

Zudem folgt aus der Definition von z

$$g(a) = f(x) - T^n_{f,a}(x) - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} = 0,$$

und aus der Definition des Taylorpolynoms folgt

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \cdot (x-x)^k - \frac{z}{(n+1)!} \cdot (x-x)^{n+1} = f(x) - f(x) = 0.$$

Wir können also den Satz von Rolle 18.5 anwenden und finden ein $c \in (a, x)$ mit

$$0 = g'(c) = \frac{z - f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot (x-c)^n.$$

Da $x - c \neq 0$, muß

$$f^{(n+1)}(c) = z = \frac{\big(f(x) - T^n_{f,a}(x)\big) \cdot (n+1)!}{(x-a)^{n+1}}$$

gelten, und damit

$$f(x) - T^n_{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

□

Beispiel 18.33 (Näherungswert für die Eulersche Zahl e)
Wir betrachten die Funktion $f = \exp$, $x = 1$ und $a = 0$. Dann ist $f^{(n+1)} = \exp$ und das n-te Taylorpolynom erfüllt

$$T^n_{\exp,0}(1) = T^n_{f,a}(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Mit Hilfe des Satzes von Taylor finden wir ein $c \in (0, 1)$ mit

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| = \left| \exp(1) - T^n_{\exp,0}(1) \right| = \frac{|\exp(c)|}{(n+1)!} \cdot |1-0|^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!},$$

wenn wir ausnutzen, daß die Exponentialfunktion streng monoton wachsend und positiv auf $[0, 1]$ ist. Wenden wir diese Abschätzung mit $n = 6$ an, so erhalten wir

$$\left| e - \frac{1957}{720} \right| < \frac{1}{1680} < \frac{1}{1000}.$$

Die Dezimalzahldarstellung von $\frac{1957}{720}$ stimmt also bis zur dritten Nachkommastelle mit der Zahl e überein, und daraus ersehen wir:

$$e = 2,718\ldots.$$

Beispiel 18.34 (Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus)
Wir wissen, daß der natürliche Logarithmus

$$\ln : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

unendlich oft differenzierbar mit Ableitung

$$\ln' : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$$

ist. Eine einfache Induktion zeigt, daß für $n \geq 1$ dann

$$\ln^{(n)} : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

gilt. Das n-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt 1 ist mithin

$$T^n_{\ln,1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{(x-1)^k}{k}.$$

Der Betrag aller Ableitungen von ln ist auf dem Intervall $[1, 2]$ streng monoton fallend, so daß insbesondere

$$|\ln^{(n+1)}(c)| \leq |\ln^{(n+1)}(1)| = n!$$

für jedes $c \in [1, 2]$ gilt. Mit dem Satz von Taylor finden wir zu $x \in [1, 2]$ ein c zwischen 1 und $x \leq 2$, so daß

$$|\ln(x) - T^n_{\ln,1}(x)| = \frac{|\ln^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!} \cdot |(x-1)|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Auf dem Intervall $[1, 2]$ konvergiert die durch die Taylorpolynome definierte Funktionenfolge mithin gleichmäßig gegen die Funktion ln, und zugleich konvergiert sie dort gleichmäßig gegen die durch die Taylorreihe definierte Funktion, d.h. für $x \in [1, 2]$ gilt

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Werten wir diese Gleichheit in $x = 2$ aus, so erhalten wir den Wert für die alternierende harmonische Reihe als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Aufgaben

Aufgabe 18.35
Sei $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit beschränkter Ableitung. Zeige, dass f dann stetig in 0 fortsetzbar ist.

Aufgabe 18.36
Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

a. $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$ mit $a = 1$.

b. $f(x) = \frac{x^2+4}{x-4}$ mit $a = 4$.

c. $f(x) = \sqrt{e^{\cos(\sqrt{x})}}$ mit $a = 0$.

Aufgabe 18.37
Zeige, daß für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, \; x \longmapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

die folgenden Aussagen gelten:

a. Für alle $n \geq 1$ gibt es ein Polynom $p_n \in \mathbb{R}[t]$, so daß für $x \neq 0$ gilt:

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{x^{3 \cdot 2^{n-1}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

b. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(-\frac{1}{x^2})}{x^k} = 0$.

c. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(0) = 0$.

d. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $T_{f,0} = 0$.

Aufgabe 18.38 (Näherungsweise Berechnung von π)
Betrachte die Funktion $f = \arctan$ auf $\mathbb{R}$.

a. Berechne das dritte Taylorpolynom $T^3_{f,0}$ von arctan mit Entwicklungspunkt 0.

b. Benutze $T^3_{f,0}$ und Aufgabe 16.21 c., um $\frac{\pi}{4}$ und damit π näherungsweise zu bestimmen. Zeige dabei, daß die in der Näherung bis auf zwei Nachkommastellen exakt ist mit

$$\pi = 3,14\ldots.$$

Aufgabe 18.39
Berechne die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos(x)+1}{x^2-\pi^2}$ mit $x < \pi$.

b. $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right)$ mit $x > 1$.

c. $\lim_{x \to 0} x^x$ mit $x > 0$.

Aufgabe 18.40
Bestimme alle Extrema der Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto (1 - x) \cdot \sqrt{1 + 9x^2}$.

Aufgabe 18.41

Berechne für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \; x \longmapsto \arctan(x)$$

das zweite Taylor-Polynom $T^2_{f,0}$ um 0 und gib eine Abschätzung für das Restglied $|f(x) - T^2_{f,0}(x)|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ an.

Aufgabe 18.42

Berechne für die Funktion

$$f : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto \frac{\cos(x)}{1 - (2x)^4}$$

das vierte Taylor-Polynom $T^4_{f,0}$ um 0.

Hinweis: mit etwas Überlegung kann man die Berechnung aller vier Ableitungen von f vermeiden.

Aufgabe 18.43

Beweise oder widerlege durch eine Gegenbeispiel die folgenden Aussagen:

a. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und auf (a, b) differenzierbare Funktion, so daß $\lim\limits_{x \to a} f'(x)$ existiert. Dann ist f differenzierbar in a.

b. Sei $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ eine stetig differenzierbare streng monoton wachsende Funktion. Dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.

§ 19 Das Riemann-Integral

Wir werden in diesem Abschnitt im wesentlichen nur Funktionen betrachten, die auf einem *abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ definiert und die dort *beschränkt* sind.

A) Riemann-integrierbare Funktionen

Definition 19.1 (Zerlegungen eines Intervalls)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ein Tupel $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit $n \geq 1$ heißt eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$, falls

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die Zahl $l(Z) := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$ heißt die *Länge* oder *Feinheit* der Zerlegung, die Menge $\operatorname{supp}(Z) := \{x_0, \ldots, x_n\}$ ihr *Träger*, die Zahl $|Z| := n$ ihre *Mächtigkeit* und die x_i ihre *Stützpunkte*.

Eine zweite Zerlegung $Z' = (y_0, \ldots, y_m)$ von $[a, b]$ heißt *Verfeinerung* von Z, falls

$$\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq \{y_0, \ldots, y_m\}.$$

Zu zwei Zerlegungen $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ und $Z' = (y_0, \ldots, y_m)$ definieren wir

$$Z * Z' := (z_0, \ldots, z_k),$$

indem wir die Elemente der Vereinigung $\operatorname{supp}(Z) \cup \operatorname{supp}(Z') = \{z_0, \ldots, z_k\}$ der Größe nach ordnen. Sind Z und Z' Zerlegungen des gleichen Intervalls, so nennen wir $Z * Z'$ ihre *gemeinsame Verfeinerung*.

Beispiel 19.2
Die Tupel $Z = (0, 1, 3, 5)$ und $Z' = (0, 2, 5)$ sind Zerlegungen von $[0, 5]$ der Länge 2 bzw. 3, und die gemeinsame Verfeinerung von Z und Z' ist $Z * Z' = (0, 1, 2, 3, 5)$.

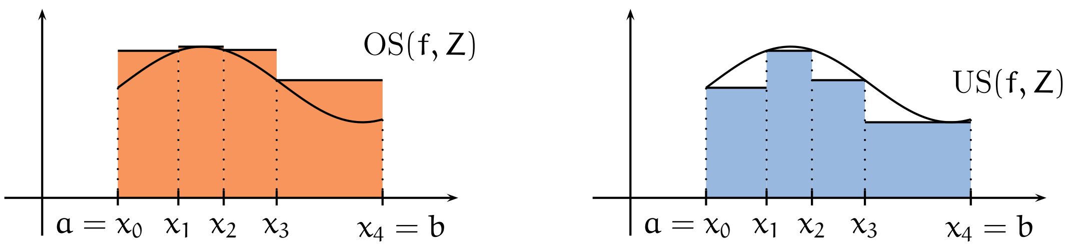
Definition 19.3 (Obersummen und Untersummen)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$, und $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$.

Wir definieren die *Obersumme* von f bezüglich Z als

$$\operatorname{OS}(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

und die *Untersumme* von f bezüglich Z als

$$\operatorname{US}(f, Z) := \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$



Beispiel 19.4

Wir betrachten die Identität $\mathrm{id} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x$ auf dem Intervall $[0,1]$ sowie die folgende äquidistante Zerlegung der Länge $\frac{1}{n}$

$$Z^n = (x_0, \ldots, x_n) = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Auf einem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ gilt dann

$$m_i := \inf\left\{ \mathrm{id}(x) \;\middle|\; x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$$

und

$$M_i := \sup\left\{ \mathrm{id}(x) \;\middle|\; x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = x_i = \frac{i}{n}.$$

Für die Unter- und Obersumme von id bezüglich Z ergibt sich unter Berücksichtigung von Beispiel 7.11 damit

$$\mathrm{US}(\mathrm{id}, Z^n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i-1}{n} = \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

und

$$\mathrm{OS}(\mathrm{id}, Z^n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot M_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} = \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Lemma 19.5

Es sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkt mit* $|f(x)| \leq M$ *für alle* $x \in [a,b]$, $a < b$.

a. *Ist* Z' *eine Verfeinerung der Zerlegung* Z *von* $[a,b]$, *so gelten*

$$0 \leq \mathrm{US}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z) \leq 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot \big(|Z'| - |Z|\big)$$

und

$$0 \leq \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{OS}(f, Z') \leq 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot \big(|Z'| - |Z|\big).$$

Insbesondere gilt also

$$\mathrm{US}(f, Z) \leq \mathrm{US}(f, Z') \leq \mathrm{OS}(f, Z') \leq \mathrm{OS}(f, Z).$$

b. *Für je zwei Zerlegungen* Z *und* Z' *von* $[a,b]$ *gilt*

$$\mathrm{US}(f, Z) \leq \mathrm{OS}(f, Z').$$

c. *Es gelten*

$$-M \cdot (b-a) \leq \mathrm{US}(f, Z) \leq \mathrm{OS}(f, Z) \leq (b-a) \cdot M.$$

Beweis:

a. Es sei $Z = (x_0, \ldots, x_n)$, und wir setzen für $i = 1, \ldots, n$ wieder

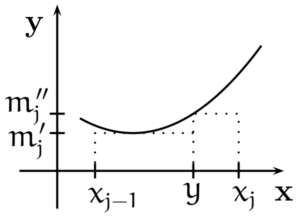
$$m_i := \inf\left\{ f(x) \;\middle|\; x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}.$$

Wir zeigen die Aussage zu den Untersummen für den Fall, dass Z' einen Punkt mehr enthält als Z. Sei also $Z' = (x_0, \ldots, x_{j-1}, y, x_j, \ldots, x_n)$. Dann gilt

$$m_j' := \inf\left\{f(x) \;\middle|\; x \in [x_{j-1}, y]\right\} \geq m_j$$

und

$$m_j'' := \inf\left\{f(x) \;\middle|\; x \in [y, x_j]\right\} \geq m_j.$$



Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{US}(f, Z) &= \sum_{i \neq j} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (x_j - x_{j-1}) \cdot m_j \\
&= \sum_{i \neq j} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (y - x_{j-1}) \cdot m_j + (x_i - y) \cdot m_j \\
&\leq \sum_{i \neq j} (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i + (y - x_{j-1}) \cdot m_j' + (x_i - y) \cdot m_j'' \\
&= \mathrm{US}(f, Z').
\end{aligned}$$

Für die Differenz der beiden Terme erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mathrm{US}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z) \\
&= (y - x_{j-1}) \cdot (m_j' - m_j) + (x_j - y) \cdot (m_j'' - m_j) \\
&\leq (y - x_{j-1}) \cdot (M + M) + (x_j - y) \cdot (M + M) \\
&= (x_j - x_{j-1}) \cdot 2 \cdot M \leq 2 \cdot M \cdot l(Z).
\end{aligned}$$

Für eine beliebige Verfeinerung Z' von Z wenden wir dann Induktion an und erhalten die Formel

$$0 \leq \mathrm{US}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z) \leq 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot \big(|Z'| - |Z|\big)$$

Die Aussage für Obersummen zeigt man analog.

b. Wir betrachten die gemeinsame Verfeinerung $Z * Z' = (y_0, \ldots, y_k)$. Wegen

$$m_i := \inf\left\{f(x) \;\middle|\; x \in [y_{i-1}, y_i]\right\} \leq \sup\left\{f(x) \;\middle|\; x \in [y_{i-1}, y_i]\right\} =: M_i$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{US}(f, Z) &\overset{a.}{\leq} \mathrm{US}(f, Z * Z') = \sum_{i=1}^{k} (y_i - y_{i-1}) \cdot m_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} (y_i - y_{i-1}) \cdot M_i = \mathrm{OS}(f, Z * Z') \overset{a.}{\leq} \mathrm{OS}(f, Z').
\end{aligned}$$

c. Die Aussage folgt aus a., da Z eine Verfeinerung der Zerlegung (a, b) ist und da $M \geq \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \geq \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \geq -M$.

□

Beispiel 19.6
In Beispiel 19.4 gilt $\mathrm{US}(\mathrm{id}, Z^n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} = \mathrm{OS}(\mathrm{id}, Z^n)$.

Da die Menge der Obersummen und die Menge der Untersummen nach Lemma 19.5 c. beschränkt sind, können wir ihr Infimum und ihr Supremum betrachten.

Definition 19.7 (Riemann-integrierbar)
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$. Wir definieren das *Oberintegral*

$$\mathrm{OI}(f) := \inf\left\{ \mathrm{OS}(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\right\}$$

von f und das *Unterintegral*

$$\mathrm{UI}(f) := \sup\left\{ \mathrm{US}(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\right\}$$

von f. Wegen Lemma 19.5 b. und Lemma 8.19 gilt

$$\mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{OI}(f).$$

Wir nennen f (Riemann-)*integrierbar* auf $[a, b]$, falls $\mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f)$. Dann heißt

$$\int_a^b f(x)\, dx := \mathrm{OI}(f) \in \mathbb{R}$$

das *Integral* von f auf $[a, b]$.

Beispiel 19.8
Aus Beispiel 19.4 wissen wir für $\mathrm{id} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} = \mathrm{US}(\mathrm{id}, Z^n) \leq \mathrm{UI}(\mathrm{id}) \leq \mathrm{OI}(\mathrm{id}) \leq \mathrm{OS}(\mathrm{id}, Z^n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

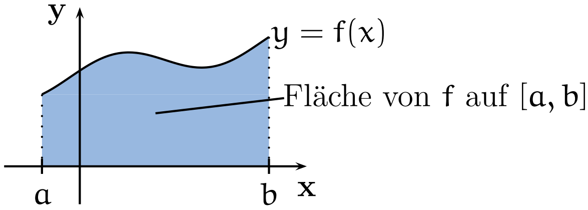
für alle $n \in \mathbb{N}$. Bilden wir nun den Grenzwert für n gegen unendlich, so erhalten wir

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{US}(\mathrm{id}, Z^n) \leq \mathrm{UI}(\mathrm{id}) \leq \mathrm{OI}(\mathrm{id}) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{OS}(\mathrm{id}, Z^n) = \frac{1}{2},$$

d.h. id ist integrierbar auf $[0, 1]$ mit

$$\int_0^1 x\, dx = \mathrm{OI}(\mathrm{id}) = \mathrm{UI}(\mathrm{id}) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 19.9 (Das Riemann-Integral als Flächeninhalt)
Wenn die Funktion nur nicht-negative Werte annimmt, dann sind die Untersummen von f nach oben beschränkt durch den Flächeninhalt I der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt, und die Obersummen von f sind durch diesen nach unten beschränkt. Aufgrund der Definition von $\mathrm{OI}(f)$ als Infimum und $\mathrm{UI}(f)$ als Supremum gilt also stets $\mathrm{UI}(f) \leq \mathrm{I} \leq \mathrm{OI}(f)$. Dass f integrierbar ist, bedeutet mithin nichts anderes, als dass das Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ den Flächeninhalt der Fläche beschreibt, die der Graph von f auf dem Intervall $[a, b]$ mit der x-Achse einschließt.



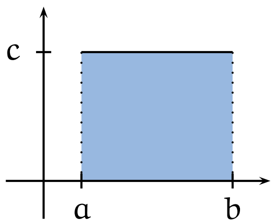
Beispiel 19.10

a. Jede konstante Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto c$ ist integrierbar mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) \cdot c.$$

Denn dann gilt für jede Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, b]$ bereits

$$\mathrm{OS}(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c = (b - a) \cdot c = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot c = \mathrm{US}(f, Z).$$



b. Die *Dirichletsche Sprungfunktion*

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist *nicht* integrierbar auf $[0, 1]$. Denn ist $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ eine beliebige Zerlegung von $[0, 1]$, so gibt es im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ sowohl eine rationale Zahl, als auch eine irrationale. Mithin gilt

$$\mathrm{US}(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$$

und

$$\mathrm{OS}(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = 1$$

für jede Zerlegung Z, so dass

$$\mathrm{UI}(f) = 0 < 1 = \mathrm{OI}(f).$$

B) Das Riemannsche Integrabilitätskriterium

Satz 19.11 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $a < b$. Genau dann ist f integrierbar auf $[a, b]$, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, Z \text{ Zerlegung von } [a, b] \; : \; \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \varepsilon.$$

Beweis: $\underline{\Longrightarrow}$: Sei zunächst f integrierbar auf $[a,b]$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aufgrund der Definition von $\mathrm{UI}(f)$ als Supremum und $\mathrm{OI}(f)$ als Infimum und wegen Proposition 8.18 gibt es Zerlegungen Z' und Z'' von $[a,b]$ mit

$$\mathrm{OI}(f) + \frac{\varepsilon}{2} > \mathrm{OS}(f, Z') \overset{19.5}{\geq} \mathrm{OS}(f, Z' * Z'')$$

und

$$\mathrm{UI}(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \mathrm{US}(f, Z'') \overset{19.5}{\leq} \mathrm{US}(f, Z' * Z'').$$

Damit erhalten wir mit $Z = Z' * Z''$ und wegen $\mathrm{UI}(f) = \mathrm{OI}(f)$

$$\mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \Big(\mathrm{OI}(f) + \frac{\varepsilon}{2}\Big) - \Big(\mathrm{UI}(f) - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon.$$

$\underline{\Longleftarrow}$: Für $\varepsilon := \frac{1}{n}$ mit $n \geq 1$ gibt es eine Zerlegung Z^n von $[a,b]$ mit

$$\frac{1}{n} > \mathrm{OS}(f, Z^n) - \mathrm{US}(f, Z^n) \geq \mathrm{OI}(f) - \mathrm{UI}(f) \geq 0.$$

Da die linke Seite der Ungleichung für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, folgt im Grenzwert

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \geq \mathrm{OI}(f) - \mathrm{UI}(f) \geq 0,$$

also $\mathrm{OI}(f) = \mathrm{UI}(f)$. Mithin ist f integrierbar auf $[a,b]$. □

Satz 19.12 (Stetige Funktionen sind integrierbar.)
Ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig,* $a < b$*, so ist* f *integrierbar auf* $[a,b]$.

Beweis: Da f stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ ist, ist f dort beschränkt nach Proposition 14.15 und gleichmäßig stetig nach Satz 14.28.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ ist, gibt es $\delta_\varepsilon > 0$, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{44}$$

für alle $x, y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$. Wir wählen nun eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit Länge $l(Z) < \delta_\varepsilon$. Da f stetig auf $[x_{i-1}, x_i]$ ist, existieren $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$f(y_i) = \sup\big\{f(y) \bigm| y \in [x_{i-1}, x_i]\big\}$$

und

$$f(z_i) = \inf\big\{f(y) \bigm| y \in [x_{i-1}, x_i]\big\},$$

und wegen $|y_i - z_i| \leq |x_i - x_{i-1}| < \delta_\varepsilon$ folgt aus (44) zudem

$$0 \leq f(y_i) - f(z_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Damit erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned}\mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \big(f(y_i) - f(z_i)\big) \\ &< \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Somit ist f integrierbar nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium 19.11. □

Beispiel 19.13
Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ 1, & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$$

und die Zerlegung $Z^n = \left(0, \frac{1}{n}, 1\right)$ für $n \geq 1$. Dann gilt

$$\text{US}(f, Z^n) = \left(\frac{1}{n} - 0\right) \cdot 0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 = 1 - \frac{1}{n}$$

und

$$\text{OS}(f, Z^n) = \left(\frac{1}{n} - 0\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 1 = 1.$$

Wir erhalten also

$$1 \longleftarrow 1 - \frac{1}{n} = \text{US}(f, Z^n) \leq \text{UI}(f) \leq \text{OI}(f) \leq \text{OS}(f, Z^n) = 1.$$

Mithin ist f auf $[0, 1]$ integrierbar mit

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1.$$

Dies zeigt, dass eine Funktion nicht stetig sein muss, um integrierbar zu sein.

Proposition 19.14 (Monotone Funktionen sind integrierbar.)
Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend, $a < b$, so ist f integrierbar.

Beweis: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass f monoton wachsend und nicht konstant ist. Insbesondere ist $f(b) > f(a)$. Außerdem ist f beschränkt, da $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in [a, b]$.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen eine natürliche Zahl n so, dass

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{(b - a) \cdot (f(b) - f(a))}, \tag{45}$$

und betrachten die Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit

$$x_i := a + i \cdot \frac{(b - a)}{n}.$$

Da f monoton wachsend ist, ist

$$\sup\left\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = f(x_i)$$

und

$$\inf\left\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\right\} = f(x_{i-1}).$$

Für die Ober- und Untersumme von f bezüglich Z folgt damit

$$\begin{aligned}\mathrm{OS}(f,Z)-\mathrm{US}(f,Z) &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)\\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\big(f(x_n)-f(x_0)\big)\\ &= \frac{b-a}{n}\cdot\big(f(b)-f(a)\big)\overset{(45)}{<}\varepsilon.\end{aligned}$$

Somit ist f integrierbar nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium 19.11. □

Beispiel 19.15
Die Funktion in Beispiel 19.13 ist monoton wachsend und deshalb nach Proposition 19.14 auch integrierbar. 19.14 sagt aber nichts über den Wert des Integrals aus!

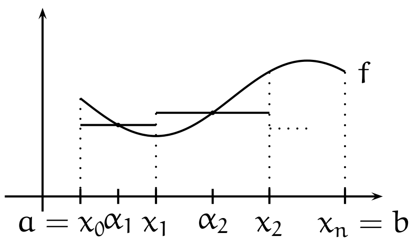
C) Riemannsches Folgenkriterium für Integrierbarkeit

Definition 19.16 (Riemannsche Zwischensummen)
Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, $a<b$, und $Z=(x_0,\ldots,x_n)$ eine Zerlegung von $[a,b]$.

Erfüllt $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ die Bedingung $\alpha_i\in[x_{i-1},x_i]$ für $i=1,\ldots,n$, so nennen wir

$$\mathrm{ZS}(f,Z,\alpha):=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\cdot f(\alpha_i)$$

die *Riemannsche Zwischensumme* von f bezüglich der Zerlegung Z und den *Zwischenpunkten* α.



Das nächste Lemma sagt, dass man Obersummen und Untersummen beliebig gut approximieren kann durch Zwischensummen.

Lemma 19.17 (Approximation von Ober- und Unter- durch Zwischensummen)
Sei $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *beschränkt,* $a<b$, Z *eine Zerlegung von* $[a,b]$ *und* $\varepsilon>0$.

a. *Dann gibt es Zwischenpunkte* α *mit* $0\le\mathrm{OS}(f,Z)-\mathrm{ZS}(f,Z,\alpha)<\varepsilon$.

b. *Dann gibt es Zwischenpunkte* β *mit* $0\le\mathrm{ZS}(f,Z,\beta)-\mathrm{US}(f,Z)<\varepsilon$.

Beweis: Sei $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ und sei

$$M_i := \sup \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in [x_{i-1}, x_i] \right\}.$$

Aufgrund der Definition von M_i als Supremum der Funktionswerte auf dem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ gibt es ein $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$, so dass

$$f(\alpha_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Damit erhalten wir für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\begin{aligned} \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{ZS}(f, Z, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \big(M_i - f(\alpha_i)\big) \\ &< \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} \\ &= (x_n - x_0) \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist a. gezeigt, und b. zeigt man analog. □

Das folgende Lemma sagt, dass für integrierbare Funktionen Untersummen und Obersummen beliebig nahe beieinander und damit beim Wert des Integrals liegen, wenn nur die Länge der Zerlegung hinreichend klein gewählt ist.

Lemma 19.18 (Verschärfung des Riemannschen Integrabilitätskriteriums)
Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar,* $a < b$*, so gilt:*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \;:\; \forall\, Z \textit{ Zerlegung mit } l(Z) < \delta_\varepsilon \textit{ gilt } \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \varepsilon.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium erhalten wir eine Zerlegung Z' von $[a, b]$, so dass

$$\mathrm{OS}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{46}$$

Wir setzen nun

$$\delta_\varepsilon := \frac{\varepsilon}{8 \cdot |Z'| \cdot M} > 0,$$

wobei $M := \sup \left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in [a, b] \right\}$. Ist Z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $l(Z) < \delta_\varepsilon$, so folgt aus aus Lemma 19.5 und $|Z * Z'| - |Z| \le |Z'|$

$$\mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{OS}(f, Z * Z') \le 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot (|Z * Z'| - |Z|) < 2 \cdot M \cdot \delta_\varepsilon \cdot |Z'| = \frac{\varepsilon}{4} \tag{47}$$

und

$$\mathrm{US}(f, Z * Z') - \mathrm{US}(f, Z) \le 2 \cdot M \cdot l(Z) \cdot (|Z * Z'| - |Z|) < 2 \cdot M \cdot \delta_\varepsilon \cdot |Z'| = \frac{\varepsilon}{4}. \tag{48}$$

Da $Z * Z'$ eine Verfeinerung von Z' ist, folgt aus (46) zusammen mit Lemma 19.5

$$\mathrm{OS}(f, Z * Z') - \mathrm{US}(f, Z * Z') \le \mathrm{OS}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{49}$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\mathrm{OS}(f,Z)-\mathrm{US}(f,Z) &= \mathrm{OS}(f,Z)-\mathrm{OS}(f,Z*Z')+\mathrm{OS}(f,Z*Z')-\mathrm{US}(f,Z*Z')\\ &\quad+\mathrm{US}(f,Z*Z')-\mathrm{US}(f,Z) \overset{(47)(49)(48)}{<} \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Satz 19.19 (Riemannsches Folgenkriterium für Integrierbarkeit)
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine beschränkte Funktion,* $a < b$*, und* $\mathrm{I} \in \mathbb{R}$*.*
Genau dann ist f *auf* $[a, b]$ *integrierbar mit* $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx$*, wenn für jede Folge* $(Z^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *von Zerlegungen von* $[a, b]$ *und Zwischenpunkten mit* $l(Z^n) \to 0$ *gilt*

$$\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow \mathrm{I}.$$

Beweis:

$\Longrightarrow$: Es sei $(Z^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit Zwischenpunkten, so dass $\lim_{n\to\infty} l(Z^n) = 0$, und sei $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx$.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ finden, so dass

$$|\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) - \mathrm{I}| < \varepsilon \tag{50}$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$.
Da f integrierbar ist, gibt es nach Lemma 19.18 ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für eine Zerlegung Z von $[a, b]$ aus $l(Z) < \delta_\varepsilon$ auch

$$\mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \varepsilon \tag{51}$$

gilt. Wegen $\lim_{n\to\infty} l(Z^n) = 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $l(Z^n) < \delta_\varepsilon$ für $n \geq n_\varepsilon$.
Für $n \geq n_\varepsilon$ leiten wir dann aus (51)

$$\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) - \mathrm{I} \leq \mathrm{OS}(f, Z^n) - \mathrm{I} \leq \mathrm{OS}(f, Z^n) - \mathrm{US}(f, Z^n) < \varepsilon$$

her, sowie

$$\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) - \mathrm{I} \geq \mathrm{US}(f, Z^n) - \mathrm{I} \geq \mathrm{US}(f, Z^n) - \mathrm{OS}(f, Z^n) > -\varepsilon.$$

Damit ist (50) für $n \geq n_\varepsilon$ erfüllt, und das heißt $\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow \mathrm{I}$.

$\Longleftarrow$: Wir wollen das Riemannsche Integrabilitätskriterium anwenden.
Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir betrachten die Zerlegung $Z^n = (x_0^n, \ldots, x_n^n)$, $n \geq 1$, mit

$$x_i^n := a + i \cdot \frac{(b-a)}{n}$$

für $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} l(Z^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0.$$

Mit Lemma 19.17 finden wir zu $n \in \mathbb{N}$ Zwischenpunkte α^n und β^n, so dass

$$\mathrm{OS}(f, Z^n) - \mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

und

$$\mathrm{ZS}(f, Z^n, \beta^n) - \mathrm{US}(f, Z^n) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Außerdem gelten nach Voraussetzung

$$\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow \mathrm{I}$$

und

$$\mathrm{ZS}(f, Z^n, \beta^n) \longrightarrow \mathrm{I}.$$

Wir finden also ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt

$$|\,\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) - \mathrm{I}| < \frac{\varepsilon}{4}$$

und

$$|\,\mathrm{ZS}(f, Z^n, \beta^n) - \mathrm{I}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned}
\mathrm{OS}(f, Z_{n_\varepsilon}) - \mathrm{US}(f, Z_{n_\varepsilon}) &= |\,\mathrm{OS}(f, Z_{n_\varepsilon}) - \mathrm{US}(f, Z_{n_\varepsilon})| \\
&\leq |\,\mathrm{OS}(f, Z_{n_\varepsilon}) - \mathrm{ZS}(f, Z_{n_\varepsilon}, \alpha^{n_\varepsilon})| + |\,\mathrm{ZS}(f, Z_{n_\varepsilon}, \alpha^{n_\varepsilon}) - \mathrm{I}| \\
&\qquad + |\mathrm{I} - \mathrm{ZS}(f, Z_{n_\varepsilon}, \beta^{n_\varepsilon})| + |\,\mathrm{ZS}(f, Z_{n_\varepsilon}, \beta^{n_\varepsilon}) - \mathrm{US}(f, Z_{n_\varepsilon})| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist f integrierbar nach dem Riemannschen Integrabilitätskriterium 19.11. Außerdem haben wir für $n \geq n_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|\,\mathrm{OS}(f, Z^n) - \mathrm{I}| &\leq |\,\mathrm{OS}(f, Z^n) - \mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n)| + |\,\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) - \mathrm{I}| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

woraus

$$\mathrm{OS}(f, Z^n) \longrightarrow \mathrm{I}$$

folgt. Analog sehen wir

$$\mathrm{US}(f, Z^n) \longrightarrow \mathrm{I}.$$

Damit erhalten wir dann

$$\mathrm{I} \longleftarrow \mathrm{US}(f, Z^n) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \mathrm{OS}(f, Z^n) \longrightarrow \mathrm{I},$$

so dass $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\, dx$ aus dem Einschachtelungssatz 11.17 folgt.

□

Beispiel 19.20
Die Funktion $f : [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, $b > 0$, ist stetig und mithin integrierbar. Setzen wir

$$x_i := \frac{i \cdot b}{n},$$

so ist $Z^n = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[0, b]$ mit Zwischenpunkten $\alpha^n = (x_1, \ldots, x_n)$, und es gilt $l(Z^n) \longrightarrow 0$. Um die Zwischensumme berechnen zu können, verwenden wir die Formel

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}, \tag{52}$$

die man mit Hilfe von Induktion leicht zeigen kann. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot \frac{i^2 \cdot b^2}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{n^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 \overset{(52)}{=} \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \\
&= \frac{b^3}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \longrightarrow \frac{b^3}{3}.
\end{aligned}$$

Aus dem Riemannschen Folgenkriterium für Integrierbarkeit 19.19 folgt dann

$$\int_0^b x^2 \, dx = \frac{b^3}{3}.$$

D) Rechenregeln für Integrale

Korollar 19.21 (Linearität und Monotonie des Integrals)
Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar,* $a < b$*, und* $c, d \in \mathbb{R}$.

a. *Dann ist* $c \cdot f + d \cdot g$ *integrierbar auf* $[a, b]$ *mit*

$$\int_a^b (c \cdot f + d \cdot g)(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx + d \cdot \int_a^b g(x) \, dx.$$

b. *Ist* $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$*, so ist auch*

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Beweis:

a. Wir beachten zunächst, dass für jede Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, b]$ mit Zwischenpunkten $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ offenbar gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ZS}(cf + dg, Z, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (cf + dg)(\alpha_i) \\
&= c \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i) + d \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot g(\alpha_i) \\
&= c \cdot \mathrm{ZS}(f, Z, \alpha) + d \cdot \mathrm{ZS}(g, Z, \alpha).
\end{aligned}$$

Es sei nun $(Z^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ und Zwischenpunkten mit $l(Z^n) \longrightarrow 0$. Aus den Grenzwertsätzen für Folgen 11.15 und Satz 19.19 folgt dann

$$\mathrm{ZS}(cf + dg, Z^n, \alpha^n) = c \cdot \mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) + d \cdot \mathrm{ZS}(g, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow c \cdot \int_a^b f(x)\,dx + d \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Das Riemannsche Folgenkriterium für Integrierbarkeit 19.19 liefert dann die Behauptung.

b. Es sei $(Z^n, \alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ und Zwischenpunkten mit $l(Z^n) \longrightarrow 0$. Wegen $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt dann offenbar

$$\int_a^b f(x)\,dx \longleftarrow \mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n) \leq \mathrm{ZS}(g, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx,$$

wobei die Grenzwerte aus dem Riemannschen Folgenkriterium für Integrierbarkeit folgen. Damit gilt dann aber auch für die Grenzwerte

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Beispiel 19.22
Aus Beispiel 19.10 und 19.20 erhalten wir aus der Linearität des Integrals

$$\int_0^b 3x^2 + 5\,dx = 3 \cdot \int_0^b x^2\,dx + \int_0^b 5\,dx = b^3 + 5b.$$

Bemerkung 19.23 (Aneinanderhängen von Zerlegungen)
Ist $Z' = (x_0, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[a, c]$ und $Z'' = (y_0, \ldots, y_m)$ eine Zerlegung von $[c, b]$, so ist $Z' * Z'' = (x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und sie entsteht durch aneinanderhängen der beiden Zerlegungen. Ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ein Tupel von Zwischenpunkten von Z' und $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ ein Tupel von Zwischenpunkten von Z'', so definieren wir $\alpha \sqcup \beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ und erhalten damit ein Tupel von Zwischenpunkten von $Z' * Z''$.

Außerdem gelten offenbar

$$\mathrm{OS}(f, Z' * Z'') = \mathrm{OS}(f, Z') + \mathrm{OS}(f, Z''),$$

$$\mathrm{US}(f, Z' * Z'') = \mathrm{US}(f, Z') + \mathrm{US}(f, Z''),$$

$$\mathrm{ZS}(f, Z' * Z'', \alpha \sqcup \beta) = \mathrm{ZS}(f, Z', \alpha) + \mathrm{ZS}(f, Z'', \beta).$$

Proposition 19.24 (Additivität des Integrals)
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *beschränkt,* $a < b$ *und* $c \in (a, b)$.

Genau dann ist f *integrierbar auf* $[a, b]$*, wenn* f *integrierbar auf* $[a, c]$ *und auf* $[c, b]$ *ist. Zudem gilt dann*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben.

Ist f integrierbar auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$, so gibt es wegen des Riemannschen Integrabilitätskriteriums 19.11 Zerlegungen $Z' = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, c]$ und $Z'' = (y_0, \ldots, y_m)$ von $[c, b]$, so dass

$$\mathrm{OS}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\mathrm{OS}(f, Z'') - \mathrm{US}(f, Z'') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist aber $Z = Z' * Z'' = (x_0, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) &= \big(\mathrm{OS}(f, Z') + \mathrm{OS}(f, Z'')\big) - \big(\mathrm{US}(f, Z') + \mathrm{US}(f, Z'')\big) \\ &= \big(\mathrm{OS}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z')\big) + \big(\mathrm{OS}(f, Z'') - \mathrm{US}(f, Z'')\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das Riemannsche Integrabilitätskriterium 19.11 impliziert also, dass f auf $[a, b]$ integrierbar ist.

Ist umgekehrt f auf $[a, b]$ integrierbar, so gibt es wegen des Riemannschen Integrabilitätskriteriums eine Zerlegung $Z = (x_1, \ldots, x_n)$ von $[a, b]$ mit

$$\mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \varepsilon.$$

Nach eventueller Verfeinerung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $c = x_j \in \operatorname{supp}(Z)$ ein Stützpunkt von Z ist. Dann ist $Z' := (x_0, \ldots, x_j)$ eine Zerlegung von $[a, c]$ und $Z'' := (x_j, \ldots, x_n)$ eine Zerlegung von $[c, b]$. Außerdem gilt $Z = Z' * Z''$ und

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{OS}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z')\big) + \big(\mathrm{OS}(f, Z'') - \mathrm{US}(f, Z'')\big) \\ = &\ \big(\mathrm{OS}(f, Z') + \mathrm{OS}(f, Z'')\big) - \big(\mathrm{US}(f, Z') + \mathrm{US}(f, Z'')\big) \\ = &\ \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Mithin gilt auch

$$\mathrm{OS}(f, Z') - \mathrm{US}(f, Z') < \varepsilon \quad \text{und} \quad \mathrm{OS}(f, Z'') - \mathrm{US}(f, Z'') < \varepsilon,$$

so dass aus dem Riemannschen Integrabilitätskriterium 19.11 wieder folgt, dass f auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ integrierbar ist.

Wir wählen nun zwei Folgen $(Z^{n\prime}, \alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Z^{n\prime\prime}, \beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von $[a, c]$ bzw. von $[c, b]$ mit Zwischenpunkten, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} l(Z^{n\prime}) = \lim\limits_{n \to \infty} l(Z^{n\prime\prime}) = 0$. Wie oben können wir die Zerlegungen $Z^{n\prime}$ und $Z^{n\prime\prime}$ zu einer Zerlegung $Z^n := Z^{n\prime} * Z^{n\prime\prime}$ von $[a, b]$ zusammenfügen und ebenfalls die Zwischenpunkte α^n und β^n zu Zwischenpunkten $\gamma^n := \alpha^n \sqcup \beta^n$ von Z^n. Dann gilt $l(Z^n) = \max\{l(Z^{n\prime}), l(Z^{n\prime\prime})\} \longrightarrow 0$, und somit folgt aus dem Folgenkriterium für Integrierbarkeit 19.19

$$\int_a^b f(x)\,dx \longleftarrow \mathrm{ZS}(f, Z^n, \gamma^n) = \mathrm{ZS}(f, Z^{n\prime}, \alpha^n) + \mathrm{ZS}(f, Z^{n\prime\prime}, \beta^n) \longrightarrow \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

□

Beispiel 19.25
Aus Proposition 19.24 und Beispiel 19.20 erhalten wir für $0 < a < b$

$$\int_a^b x^2\,dx = \int_0^b x^2\,dx - \int_0^a x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Die Dreiecksungleichung für Summen liefert mit Induktion, dass

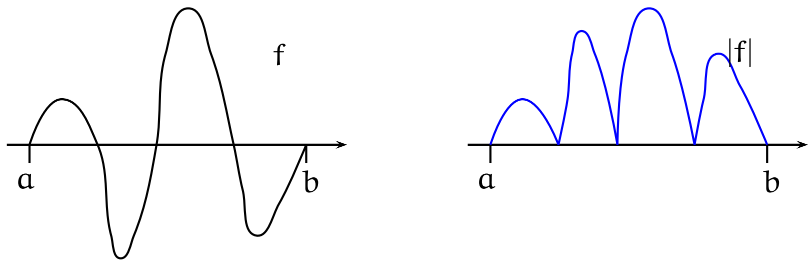
$$|a_1 + \ldots + a_n| \le |a_1| + \ldots + |a_n|$$

gilt. Integrale sind verallgemeinerte Summen, und die Dreiecksungleichung nimmt dann die folgende Gestalt an.

Proposition 19.26 (Dreiecksungleichung für Integrale)
Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar auf* $[a, b]$*,* $a < b$*, so ist* $|f|$ *integrierbar auf* $[a, b]$*, und es gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Wir nennen das Integral über $|f|$ *auch den* Flächeninhalt*, den der Graph von* f *auf dem Intervall* $[a, b]$ *mit der* x*-Achse einschließt.*

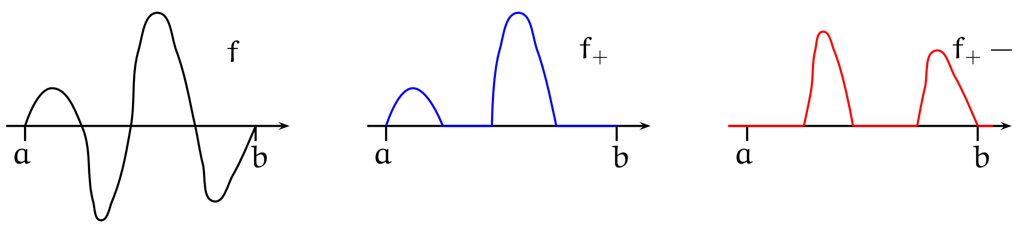


Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$f_+ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \ge 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$|f| = 2 \cdot f_+ - f.$$



Wir wollen nun mit Hilfe des Riemannschen Integrabilitätskriteriums zeigen, dass f_+ auf $[a, b]$ integrierbar ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f auf $[a, b]$ integrierbar ist, gibt es eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, b]$, so dass

$$\mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \varepsilon.$$

Wir behaupten, dass für jede Teilmenge $I \subseteq [a, b]$ die Ungleichung

$$\sup\{f_+(x) \mid x \in I\} - \inf\{f_+(x) \mid x \in I\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in I\} - \inf\{f(x) \mid x \in I\}, \quad (53)$$

gilt. Dazu betrachten wir verschiedene Fälle.

1. **Fall: $f(x) < 0$ für alle $x \in I$:** Dann gilt $f_+ \equiv 0$ auf I, so dass die linke Seite in (53) Null ist. Zugleich gilt

$$\inf\{f(x) \mid x \in I\} \leq \sup\{f(x) \mid x \in I\} \leq 0,$$

so dass die rechte Seite von (53) nicht-negativ ist. In diesem Fall gilt (53).

2. **Fall: $\exists\, y, z \in I$ mit $f(y) < 0 \leq f(z)$:** Also $\sup\{f_+(x) | \, x \in I\} = \sup\{f(x) | \, x \in I\}$ und $\inf\{f_+(x) | \, x \in I\} = 0 > \inf\{f(x) \mid x \in I\}$. Damit gilt die Ungleichung (53).
3. **Fall: $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$:** Dann ist $f = f_+$ auf I und (53) gilt.

Damit haben wir gezeigt, dass (53) stets erfüllt ist. Für die Differenz der Ober- und Untersumme von f_+ ergibt sich mit $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{OS}(f_+, Z) - \mathrm{US}(f_+, Z) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \big(\sup\{f_+(x) \mid x \in I_i\} - \inf\{f_+(x) \mid x \in I_i\}\big) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \big(\sup\{f(x) \mid x \in I_i\} - \inf\{f(x) \mid x \in I_i\}\big) \\
&= \mathrm{OS}(f, Z) - \mathrm{US}(f, Z) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Riemannschen Integrabilitätskriteriums 19.11 folgt dann, dass f_+ auf $[a, b]$ integrierbar ist. Aus der Linearität des Integrals 19.21 folgt dann, dass auch

$$|f| = 2 \cdot f_+ - f$$

auf $[a, b]$ integrierbar ist.

Für eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ mit Zwischenpunkten $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gilt

$$|\,\mathrm{ZS}(f, Z, \alpha)| = \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot |f(\alpha_i)| = \mathrm{ZS}(|f|, Z, \alpha).$$

Sei nun $(Z^n, \alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ und Zwischenpunkten mit $\lim\limits_{n \to \infty} l(Z^n) = 0$, dann folgt

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \longleftarrow |\,\mathrm{ZS}(f, Z^n, \alpha^n)| \leq \mathrm{ZS}(|f|, Z^n, \alpha^n) \longrightarrow \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Die Ungleichung bleibt für die Grenzwerte erhalten. □

Bemerkung 19.27

Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a, b]$. Wenden wir Proposition 19.24 zweimal an, so sehen wir, dass f auf jedem Teilintervall $[c, d]$ von $[a, b]$ mit $c < d$ ebenfalls integrierbar ist. Wir definieren nun

$$\int_c^c f(x)\, dx := 0$$

und

$$\int_d^c f(x)\,dx := -\int_c^d f(x)\,dx.$$

Damit müssen die Integrationsgrenzen also nicht mehr verschieden sein, und die untere Integrationsgrenze muss auch nicht mehr die kleinere sein. Die Linearität und Additivität des Integrals verallgemeinern sich dann in naheliegender Weise.

Aufgaben

Aufgabe 19.28

Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_n)$ von $[a, b]$ gibt, so dass die Funktionen $f_i : [x_{i-1}, x_i] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ für $i = 1, \ldots, n$ auf (x_{i-1}, x_i) stetig sind und so dass die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_{i-1}} f_i(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_i} f_i(x)$ in $\mathbb{R}$ existieren.

Zeigen Sie, eine stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar auf $[a, b]$.

Aufgabe 19.29

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{\cos^2(x)} dx$.
b. $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
c. $\int_{-1}^2 \left(8 \cdot (x-2)^3 + \frac{1}{\sqrt{x+2}}\right) dx$.
d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\cos(x) dx$.
e. $\int_0^{\frac{1}{4}} x^2 e^{4x} dx$.

Aufgabe 19.30

Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Zerlegung $Z^n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ des Intervalls $[0, 1]$ mit den Zwischenpunkten $\alpha^n = (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a. $\mathrm{ZS}(\exp, Z^n, \alpha^n) = (e-1) \cdot e^y \cdot \frac{1}{\frac{e^y-1}{y}}$ für $y = \frac{1}{2^n}$.
b. $\lim\limits_{y \to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$.
c. Berechnen Sie $\int_0^1 e^x dx$ mit Hilfe der Zwischensumme aus Aufgabenteil a..

Aufgabe 19.31

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Des Weiteren existiere ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) > 0$. Zeigen Sie, dass $\int_a^b f(x) dx > 0$ ist.

Aufgabe 19.32

Es sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion, so dass es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Werte $x \in [0, 1]$ gibt mit $f(x) > \varepsilon$. Zeigen Sie, f ist integrierbar auf $[0, 1]$ mit $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

§ 20 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit Anwendungen

Definition 20.1 (Stammfunktion)
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.
Eine differenzierbare Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt *Stammfunktion* von f.

Proposition 20.2 (Stammfunktionen sind eindeutig bis auf eine Konstante.)
Sei I *ein Intervall,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $F, G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *zwei Stammfunktionen von* f. *Dann gibt es ein* $c \in \mathbb{R}$*, so daß* $F(x) = G(x) + c$ *für alle* $x \in I$.

Beweis: Wähle einen Punkt $a \in I$ und setze $c := F(a) - G(a)$. Sei nun $a \neq b \in I$ gegeben, so müssen wir

$$F(b) = G(b) + c$$

zeigen. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $a < b$ gilt. Nach Voraussetzung ist $F - G$ auf dem Intervall $[a, b] \subseteq I$ differenzierbar, also ist $F - G$ dort auch stetig. Wegen

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

für alle $x \in [a, b]$ folgt aus Proposition 18.11, daß $F - G$ auf $[a, b]$ konstant ist. Es gilt also insbesondere, daß

$$F(b) - G(b) = F(a) - G(a) = c.$$

□

Beispiel 20.3
Die Funktion $F : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ ist eine Stammfunktion von $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, da $F' = f$. Man beachte, daß wir aus Beispiel 19.20 wissen, daß

$$F(y) = \frac{y^3}{3} = \int_0^y f(x)\, dx.$$

Diese Beobachtung werden wir im folgenden Satz verallgemeinern.

Satz 20.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $a \in I$.
Dann ist die Funktion $F : I \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^y f(x)\, dx$ *eine Stammfunktion von* f.

Beweis: Sei $c \in I$ gegeben. Wir müssen zeigen, daß F in c differenzierbar ist mit $F'(c) = f(c)$. Sei dazu wiederum $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann müssen wir ein $\delta_\varepsilon > 0$ finden, so daß

$$\left| \frac{F(y) - F(c)}{y - c} - f(c) \right| < \varepsilon$$

für alle $y \in I$ mit $0 < |y - c| < \delta_\varepsilon$ gilt.

Da f stetig in c ist, gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß

$$|f(x) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{54}$$

für alle $x \in I$ mit $|x - c| < \delta_\varepsilon$. Sei nun $c \neq y \in I$ mit $|y - c| < \delta_\varepsilon$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(y)-F(c)}{y-c} - f(c)\right| &= \left|\frac{1}{y-c}\cdot\left(\int_a^y f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right) - f(c)\right| \\
&\overset{19.24}{=} \left|\frac{1}{y-c}\cdot\int_c^y f(x)\,dx - f(c)\right| \\
&= \left|\frac{1}{y-c}\cdot\int_c^y f(x)\,dx - \frac{f(c)\cdot(y-c)}{y-c}\right| \\
&= \left|\frac{1}{y-c}\cdot\int_c^y f(x)\,dx - \frac{\int_c^y f(c)\,dx}{y-c}\right| \\
&\overset{19.21}{=} \left|\frac{1}{y-c}\cdot\int_c^y \big(f(x)-f(c)\big)\,dx\right| \\
&\overset{19.26}{\leq} \frac{1}{|y-c|}\cdot\left|\int_c^y \big|f(x)-f(c)\big|\,dx\right| \\
&\overset{(54),19.21}{\leq} \frac{1}{|y-c|}\cdot\left|\int_c^y \frac{\varepsilon}{2}\,dx\right| \\
&= \frac{|y-c|}{|y-c|}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Korollar 20.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* F *sei eine Stammfunktion von* f*. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Beweis: Wegen Satz 20.4 und 20.2 gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx + c$$

für alle $y \in I$ gilt. Setzen wir $y = a$ ein, so erhalten wir

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx + c = 0 + c = c,$$

und mithin gilt insbesondere

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - c = F(b) - F(a).$$

□

Bemerkung 20.6
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig.

a. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4 besagt im wesentlichen, daß die Differentiation die Umkehrung der Integration ist.

b. Ist $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und $a, b \in I$, so schreiben wir auch

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

c. Wir nennen den Ausdruck

$$\int f(x)\,dx$$

ein *unbestimmtes Integral*. Man verwendet ihn gemeinhin, um eine beliebige Stammfunktion F zu bezeichnen, und schreibt dann $F(y) = \int^y f(x)\,dx$.

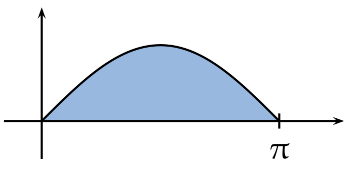
A) Stammfunktionen aus Ableitungen ablesen

Beispiel 20.7 (Einige ausgewählte Stammfunktionen)
In den Abschnitten 17 und 18 haben wir für eine Vielzahl stetig differenzierbarer Abbildungen die Ableitungen kennengelernt. Im Umkehrschluß haben wir damit für die Ableitungsfunktionen auch Stammfunktionen gefunden. Wir wollen für einige wichtige Beispiele von Funktionen f hier die Stammfunktionen F in tabellarischer Form zusammenstellen.

f	$F = \int f(x)\,dx$	f	$F = \int f(x)\,dx$
$\exp$	$\exp$	$\exp_a,\quad a \neq 1$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \exp_a$
$\cos$	$\sin$	$\sin$	$-\cos$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\ln$	$x \mapsto x^a,\quad -1 \neq a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$	$\arctan$	$\frac{1}{\cos^2}$	$\tan$

Beispiel 20.8 (Flächeninhalt eines Sinusbogens)
Wir können den Flächeninhalt unter einem der Bögen der Sinusfunktion berechnen als

$$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 1 + 1 = 2.$$



B) Der Mittelwertsatz der Integralrechnung

Korollar 20.9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig*, $a < b$. *Dann gibt es ein* $c \in (a, b)$ *mit*

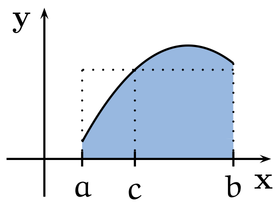
$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a).$$

Beweis: Die Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^y f(x)\, dx$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4 eine Stammfunktion von f und damit differenzierbar. Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir deshalb ein $c \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b - a) = f(c) \cdot (b - a).$$

□

Bemerkung 20.10 (Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes)
Der Mittelwertsatz besagt, daß das Rechteck mit den Seitenlängen $b - a$ und $f(c)$ den gleichen Flächeninhalt hat, wie die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.



C) Partielle Integration

Satz 20.11 (Partielle Integration)
Sind $u, v : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx.$$

Beweis: Aufgrund der Produktregel gilt $(u \cdot v)'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$ für $x \in [a, b]$, und mithin ist $u \cdot v$ eine Stammfunktion von $x \mapsto u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$. Da letztere Funktion stetig ist auf $[a, b]$ folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4 und wegen der Linearität des Integrals 19.21

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx + \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x)\Big|_a^b.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Bemerkung 20.12 (Partielle Integration als Umkehrung der Produktregel)
Die partielle Integration ist die Umkehrung der Produktregel. Man wendet sie an, wenn man hofft, das Integral über $u' \cdot v$ leichter berechnen zu können als das über $u \cdot v'$. Auch mit partieller Integration kann man Stammfunktionen berechnen, indem man b durch die Variable y ersetzt und a ignoriert.

Beispiel 20.13 (Stammfunktion von $\cos^2$)
Wir wollen eine Stammfunktion von $\cos^2$ mit Hilfe partieller Integration berechnen. Dazu betrachten wir $u(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = \cos(x)$. Dann ist $v(x) = \sin(x)$, und

es gilt

$$\begin{aligned}
\int^y \cos^2(x)\,dx &= \int^y u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\big|^y - \int^y u'(x)\cdot v(x)\,dx \\
&= \cos(x)\cdot\sin(x)\big|^y - \int^y -\sin^2(x)\,dx \\
&= \cos(x)\cdot\sin(x)\big|^y - \int^y \cos^2(x) - 1\,dx \\
&= \cos(x)\cdot\sin(x)\big|^y - \int^y \cos^2(x)\,dx + \int^y 1\,dx \\
&= \cos(x)\cdot\sin(x)\big|^y - \int^y \cos^2(x)\,dx + x\big|^y.
\end{aligned}$$

Addieren wir auf beiden Seiten $\int^y \cos^2(x)\,dx$ und teilen durch 2, so erhalten wir

$$\int^y \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\big(y + \cos(y)\cdot\sin(y)\big).$$

D) Der Satz von Taylor

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und unter Anwendung der Methode der partiellen Integration ergibt sich eine Integralform für das Restglied im Satz von Taylor.

Korollar 20.14 (Satz von Taylor – Restglied in Integralform)
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\;n+1$*-fach stetig differenzierbar auf dem Intervall* I *und* $x, a \in I$. *Dann gilt*

$$f(x) - T^n_{f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}\cdot(x-y)^n\,dy.$$

Beweis: Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Für $n = 0$ gilt

$$f(x) - T^0_{f,a}(x) = f(x) - f(a) \overset{20.5}{=} \int_a^x f'(y)\,dy = \int_a^x \frac{f'(y)}{0!}\cdot(x-y)^0\,dy$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4.

Nun setzen wir voraus, daß $n \geq 1$ ist und daß die Aussage für $n-1$ bereits gezeigt ist und wir wollen sie für n zeigen. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$f(x) - T^{n-1}_{f,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}\cdot(x-y)^{n-1}\,dy.$$

Wir setzen nun $u(y) := \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}$ und $v'(y) := (x-y)^{n-1}$ und wenden partielle Integration an. Die Stammfunktion von v' ist durch $v(y) = \frac{-(x-y)^n}{n}$ gegeben, so daß wir

$$\begin{aligned}
f(x) - T_{f,a}^{n-1}(x) &= \int_a^x \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} \cdot (x-y)^{n-1}\, dy = \int_a^x u(y) \cdot v'(y)\, dy \\
&= u(y) \cdot v(y)\Big|_a^x - \int_a^x u'(y) \cdot v(y)\, dy \\
&= \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!} \cdot \frac{-(x-y)^n}{n}\Bigg|_a^x - \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n-1)!} \cdot \frac{-(x-y)^n}{n}\, dy \\
&= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n\, dy.
\end{aligned}$$

Bringen wir den Summanden $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$ auf die linke Seite, so erhalten wir

$$f(x) - T_{f,a}^{n}(x) = f(x) - T_{f,a}^{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!} \cdot (x-y)^n\, dy,$$

und damit folgt die Behauptung mittels des Prinzips der Induktion. □

E) Die Substitutionsregel

Satz 20.15 (Substitutionsregel)
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall,* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar mit* $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq I$*. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx.$$

Beweis: Da φ stetig ist, nimmt φ sein Minimum und sein Maximum an, d.h. es gibt $y, z \in [a,b]$ mit $\varphi(y) \leq \varphi(x) \leq \varphi(z)$ für alle $x \in [a,b]$, und mithin ist

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \big[\varphi(y), \varphi(z)\big] \subseteq I$$

ein Intervall. Als stetige Funktion besitzt f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4 auf diesem Intervall eine Stammfunktion F. Aus der Kettenregel 17.16 folgt dann

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x),$$

so daß $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $x \mapsto f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)$ auf $[a,b]$ ist. Dann können wir Korollar 20.5 anwenden und erhalten

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx \overset{20.5}{=} (F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) \overset{20.5}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx.$$

□

Bemerkung 20.16 (Die Substitutionsregel als Umkehrung der Kettenregel)

a. Die Substitutionsregel ist die Umkehrung der Kettenregel.

b. Es ist üblich, bei der Formel für die Substitutionsregel auf der linken Seite statt der Variablen x die Variable z zu verwenden, so daß die Formel folgende Gestalt hat:
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz = \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,dx.$$
Man sagt dann, daß man $\varphi(x)$ durch z substituiert oder umgekehrt, je nachdem ob man die linke durch die rechte Seite ausrechnen will oder umgekehrt. Man schreibt $z = \varphi(x)$.
Diese Schreibweise kann man nutzen, um sich für die Substitution eine Eselsbrücke zu bauen. In Anlehnung an die Schreibweise $\varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ kann man mit $z = \varphi(x)$ dann auch
$$\varphi'(x)\,dx = \frac{dz}{dx}\,dx = dz$$
schreiben. Damit wird aus der Substitutionsformel ohne Integralgrenzen dann
$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(z)\cdot\frac{dz}{dx}\,dx = \int f(z)\,dz.$$

c. Man kann mit Hilfe der Substitutionsregel auch Stammfunktionen ausrechnen, indem man die Integrationsgrenze b durch die Variable y ersetzt und a ignoriert.

Beispiel 20.17 (Stammfunktion von $x \mapsto x\cdot\exp(x^2)$)
Wir wollen das Integral $\int_a^b x\cdot\exp\left(x^2\right)dx$ für $a, b \in \mathbb{R}$ berechnen. Dazu substituieren wir $z = x^2$, d.h. wir betrachten $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$, $\varphi'(x) = 2x$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \frac{\exp(z)}{2}$. Da zudem f eine Stammfunktion von f ist, folgt damit
$$\begin{aligned}\int_a^b x\cdot\exp\left(x^2\right)dx &= \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(z)\,dz\\ &= \int_{a^2}^{b^2}\frac{\exp(z)}{2}\,dz = \frac{\exp\left(b^2\right)}{2} - \frac{\exp\left(a^2\right)}{2}.\end{aligned}$$

Beispiel 20.18 (Stammfunktion von tan)
Wir wollen eine Stammfunktion für den Tangens auf dem Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bestimmen. Dazu substituieren wir $z = \cos(x)$, d.h. $\varphi(x) = \cos(x)$, $\varphi'(x) = -\sin(x)$ und $f(z) = -\frac{1}{z}$. Dann erhalten wir
$$\begin{aligned}\int^y \tan(x)\,dx &= \int^y -\frac{1}{\cos(x)}\cdot\big(-\sin(x)\big)\,dx = \int^y f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,dx\\ &= \int^{\cos(y)} f(z)\,dz = \int^{\cos(y)} -\frac{1}{z}\,dz\\ &= -\ln(z)\Big|^{\cos(y)} = -\ln\big(\cos(y)\big).\end{aligned}$$
Also ist $-\ln\circ\cos$ eine Stammfunktion von tan auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Beispiel 20.19 (Stammfunktion von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$)
Wir wollen mit Hilfe von Substitution eine Stammfunktion für die stetige Funktion
$$f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : z \mapsto \sqrt{1-z^2}$$

bestimmen. Dazu substituieren wir $z = \sin(x)$, d.h. $\varphi(x) = \sin(x)$, $\varphi'(x) = \cos(x)$ und $b = \arcsin(y)$. Dann definiert

$$\begin{aligned}
F(y) = \int^{y} \sqrt{1-z^2}\,dz = \int^{\varphi(b)} f(z)\,dz &= \int^{b} f\big(\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\,dx \\
&= \int^{\arcsin(y)} \sqrt{1-\sin^2(x)}\cdot\cos(x)\,dx \\
&= \int^{\arcsin(y)} \sqrt{\cos^2(x)}\cdot\cos(x)\,dx \\
&= \int^{\arcsin(y)} \cos^2(x)\,dx \\
&\overset{20.13}{=} \frac{1}{2}\cdot\big(x+\cos(x)\cdot\sin(x)\big)\Big|^{\arcsin(y)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(x+\sqrt{\cos^2(x)}\cdot\sin(x)\big)\Big|^{\arcsin(y)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\big(x+\sqrt{1-\sin^2(x)}\cdot\sin(x)\big)\Big|^{\arcsin(y)} \\
&= \frac{\arcsin(y)+y\cdot\sqrt{1-y^2}}{2}.
\end{aligned}$$

eine Stammfunktion von f auf $[-1,1]$.

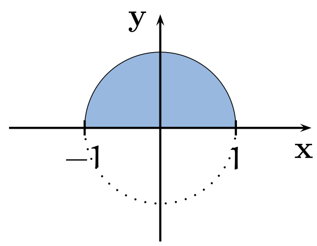
Beispiel 20.20 (Flächeninhalt eines Kreises)
Wir wollen nun den Flächeninhalt eines Kreises berechnen. Die obere Hälfte des Einheitskreises mit dem Ursprung als Mittelpunkt

$$K_1(0) := \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; x^2+y^2=1\big\}$$

ist die Fläche, die der Graph der Funktion

$$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$$

mit der x-Achse einschließt.



Mithin ist das Integral

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx &\overset{20.19}{=} \frac{\arcsin(x)+x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2}\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\arcsin(1)}{2} - \frac{\arcsin(-1)}{2} = \frac{\pi}{4} - \Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

die Hälfte des Flächeninhaltes des Einheitskreises.

Der Kreis mit Radius r und dem Ursprung als Mittelpunkt ist

$$K_r(0) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \bigm| x^2+y^2=r^2\big\},$$

und sein Flächeninhalt ist entsprechend das Integral

$$2 \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\, dx.$$

Um dieses zu berechnen, substituieren wir $z=\frac{x}{r}$, d.h. $\varphi(x)=\frac{x}{r}$, $\varphi'(x)=\frac{1}{r}$, $\varphi(r)=1$, $\varphi(-r)=-1$ und $f(z)=\sqrt{1-z^2}$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} 2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx =& 2\cdot r^2\cdot\int_{-r}^{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\cdot\frac{1}{r}\,dx \\ =& 2\cdot r^2\cdot\int_{-1}^{1}\sqrt{1-z^2}\,dz = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot r^2 = \pi\cdot r^2 \end{aligned}$$

als Flächeninhalt von $K_r(0)$.

F) Partialbruchzerlegung

Bemerkung 20.21 (Partialbruchzerlegung)
Jede rationale Funktion $r=\frac{f}{g}$ läßt sich schreiben als

$$r=\frac{f}{g}=h+\frac{p}{q}, \tag{55}$$

wobei h, p und q Polynome sind mit $\deg(p)<\deg(q)$. Dies folgt sofort mittels einer einfachen Polynomdivision, wie sie in der Vorlesung Algebraische Strukturen eingeführt wird.

Nicht offensichtlich ist, daß sich der Bruch $\frac{p}{q}$ als Summe von Ausdrücken der Form

$$\frac{A}{(t-a)^k} \quad \text{und} \quad \frac{Bt+C}{(t^2+bt+c)^k} \tag{56}$$

für geeignete $A,B,C,a,b,c\in\mathbb{R}$ mit $4b-a^2>0$ schreiben läßt. Genauer kann man zeigen, daß wenn $(t-a)^n$ bzw. $(t^2+bt+c)^n$ die höchste Potenz von $t-a$ bzw. von t^2+bt+c ist, die das Polynom q teilt, so kommen in der Summe Ausdrücke der Form (56) für $k=1,\ldots,n$ vor. Eine solche Darstellung nennt man dann die *Partialbruchzerlegung* von $\frac{p}{q}$. Wir werden unten in einem Beispiel sehen, wie man diese unter Umständen finden kann.

Eine rationale Funktion wie in (55) ist stetig auf ihrem Definitionsbereich, der eine Vereinigung von endlich vielen Intervallen ist. Mithin ist sie auf allen abgeschlossenen Teilintervallen ihres Definitionsbereiches integrierbar. Um nun eine Stammfunktion von r zu bestimmen, reicht es im wesentlichen, Funktionen der Form (56) zu integrieren. Dies ist mit Hilfe unserer bisherigen Methoden vergleichsweise einfach, sei in der allgemeinen Form aber dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Beispiel 20.22 (Integration mit Partialbruchzerlegung)
Wir wollen das folgende Integral berechnen:

$$\int_1^2 \frac{3x^5+3x^4+6x^2+x-2}{x^3+x^2}\,dx.$$

Polynomdivision von $3t^5+3t^4+6t^2+t-2$ durch t^3+t^2 liefert

$$r = \frac{3t^5+3t^4+6t^2+t-2}{t^3+t^2} = 3t^2 + \frac{6t^2+t-2}{t^3+t^2} = f + \frac{p}{q}.$$

Dabei faktorisiert q als

$$q = t^2 \cdot (t+1).$$

Das Prinzip der Partialbruchzerlegung läßt uns nun nach Zahlen $A, B, C \in \mathbb{R}$ suchen, so daß

$$\frac{6t^2+t-2}{t^3+t^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1}$$

gilt. Bringen wir die rechte Seite auf den Hauptnenner, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{6t^2+t-2}{t^3+t^2} &= \frac{A\cdot t\cdot(t+1)}{t^3+t^2} + \frac{B\cdot(t+1)}{t^3+t^2} + \frac{C\cdot t^2}{t^3+t^2}\\ &= \frac{(A+C)\cdot t^2 + (A+B)\cdot t + B}{t^3+t^2}.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich der Polynome im Zähler der beiden Seiten führt zu den Gleichungen:

$$A+C=6, \quad A+B=1 \quad \text{und} \quad B=-2.$$

Daraus lesen wir ohne Schwierigkeiten

$$A=3, \quad B=-2 \quad \text{und} \quad C=3$$

ab. Für unser Integral ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{3x^5+3x^4+6x^2+x-2}{x^3+x^2}\,dx &= \int_1^2 3x^2\,dx + \int_1^2 \frac{3}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{-2}{x^2}\,dx + \int_1^2 \frac{3}{x+1}\,dx\\ &= x^3 + 3\cdot\ln(x) + \frac{2}{x} + 3\cdot\ln(x+1)\Big|_1^2\\ &= 8 + 3\cdot\ln(2) + 1 + 3\cdot\ln(3) - 1 - 3\cdot\ln(1) - 2 - 3\cdot\ln(2)\\ &= 3\cdot\ln(3) + 6.\end{aligned}$$

G) Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration

Satz 20.23 (Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration)
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *stetiger Funktionen* $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *konvergiere auf* $[a,b]$, $a<b$, *gleichmäßig gegen* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Dann ist auch die Grenzfunktion f *stetig auf* $[a,b]$ *und für alle* $y \in [a,b]$ *gilt*

$$\int_a^y f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^y f_n(x)\,dx. \tag{57}$$

D.h. der Grenzwert der Stammfunktionen der f_n *ist eine Stammfunktion von* f.

Beweis: Nach Satz 15.6 ist f als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig. Da stetige Funktionen nach Satz 19.12 integrierbar sind, existieren die Integrale in (57). Es bleibt, für $y \in [a, b]$ zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^y f_n(x)\,dx = \int_a^y f(x)\,dx.$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_\varepsilon$ und für alle $x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}. \tag{58}$$

Dann gilt für $n \geq n_\varepsilon$ auch

$$\left| \int_a^y f_n(x)\,dx - \int_a^y f(x)\,dx \right| \overset{19.26}{\leq} \int_a^y |f_n(x) - f(x)|\,dx \overset{19.21,(58)}{\leq} \int_a^y \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Bemerkung 20.24

a. Wie in Bemerkung 18.18 wollen wir wieder darauf hinweisen, daß wir in Satz 20.23 gezeigt haben, daß zwei Grenzwertprozesse vertauschen. Es gilt nämlich

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathrm{ZS}(f_n, Z_m, \alpha^m) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathrm{ZS}(f_n, Z_m, \alpha^m).$$

b. Ersetzen wir in Satz 20.23 die Voraussetzung *stetig* durch *integrierbar*, so wird auch die Grenzfunktion f nur noch *integrierbar* sein, es gilt aber nach wie vor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Wir geben unten einen Beweis für diese Aussage.

c. Wir können mit Satz 20.23 und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4 einen wesentlich kürzeren Beweis der Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung 18.17 geben:

Die Funktionen f_n in Satz 18.17 sind jeweils Stammfunktion von f_n', und da die f_n' stetig sind, folgt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.5

$$f_n(y) - f_n(a) = \int_a^y f_n'(x)\,dx.$$

Bilden wir auf beiden Seiten den Grenzwert, so folgt mit Satz 20.23

$$f(y) - f(a) \longleftarrow f_n(y) - f_n(a) = \int_a^y f_n'(x)\,dx \longrightarrow \int_a^y g(x)\,dx.$$

Also ist

$$f(y) = f(a) + \int_a^y g(x)\,dx$$

für $y \in [a, b]$, so daß f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 20.4 differenzierbar ist auf $[a, b]$ mit

$$f'(y) = 0 + g(y) = g(y)$$

für alle $y \in [a, b]$.

Beweis von Teil b. Wir zeigen zunächst, daß die Folge $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_\varepsilon$ und für alle $x \in [a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot (b - a)}. \tag{59}$$

Dann gilt für $m > n \geq n_\varepsilon$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{2\varepsilon}{3 \cdot (b - a)} \tag{60}$$

für alle $x \in [a, b]$ und mithin

$$\left|\int_a^b f_m(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| \overset{19.26}{\leq} \int_a^b |f_m(x) - f_n(x)|\,dx \overset{19.21,(60)}{\leq} \int_a^b \frac{2\varepsilon}{3 \cdot (b - a)}\,dx = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Also ist die Folge $\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Wir setzen

$$I := \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Nun wollen wir das Folgenkriterium für Integrierbarkeit 19.19 anwenden, um zu zeigen, daß f integrierbar ist und daß $I = \int_a^b f(x)\,dx$. Sei dazu $(Z_m, \alpha^m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ und Zwischenpunkten mit $l(Z_m) \longrightarrow 0$, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen nun $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ wie oben.

Außerdem, da $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = I$, gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - I\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{61}$$

für alle $n \geq N_\varepsilon$.

Wir setzen $n := \max\{n_\varepsilon, N_\varepsilon\}$. Für eine beliebige Zerlegung $Z = (x_0, \ldots, x_k)$ von $[a, b]$ mit Zwischenpunkten $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{ZS}(Z, f_n, \alpha) - \mathrm{ZS}(Z, f, \alpha)| &= \left|\sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \cdot \big(f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)\big)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \cdot \big|f_n(\alpha_i) - f(\alpha_i)\big| \\ &\overset{(59)}{<} \sum_{i=1}^k (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{3 \cdot (b - a)} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{62}$$

Da f_n integrierbar ist, gibt es wegen des Folgenkriteriums für Integrierbarkeit 19.19 zudem ein $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so daß

$$\left|\mathrm{ZS}(f_n, Z_m, \alpha^m) - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{63}$$

für alle $m \geq m_\varepsilon$.

Damit erhalten wir für $m \geq m_\varepsilon$ insgesamt

$$\begin{aligned}
&\big|\,\mathrm{ZS}(f, Z_m, \alpha^m) - I\big| \leq \\
&\leq \big|\,\mathrm{ZS}(f, Z_m, \alpha^m) - \mathrm{ZS}(f_n, Z_m, \alpha^m)\big| + \left|\mathrm{ZS}(f_n, Z_m, \alpha^m) - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| + \left|\int_a^b f_n(x)\,dx - I\right| \\
&\overset{(61),(62),(63)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß $\mathrm{ZS}(f, Z_m, \alpha^m) \longrightarrow I$ und die Behauptung folgt dann aus dem Folgenkriterium für Integrierbarkeit 19.19. □

Korollar 20.25 (Integration von Potenzreihen)
Es sei $\sum_{n=0}^\infty a_n \cdot t^n$ *ein Potenzreihe über* $\mathbb{R}$ *mit Konvergenzradius* $r > 0$.
Dann ist die Funktion $f : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n \cdot x^n$ *auf jedem Intervall* $[a, b] \subset (-r, r)$ *integrierbar und*

$$F : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot y^{n+1}$$

ist eine Stammfunktion von f. *Sie entsteht durch gliedweises Integrieren.*

Beweis: Die Folge stetiger Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n : (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

konvergiert auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen f (siehe Satz 15.4). Also ist f nach Satz 15.6 stetig auf $[a, b]$. Für $y \in (-r, r)$ gilt nach Satz 20.23 zudem

$$\int_0^y f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^y f_n(x)\,dx \overset{19.21}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \int_0^y x^k\,dx \overset{20.7}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \cdot y^{k+1}.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Man kann durch gliedweises Integrieren Stammfunktionen berechnen oder auch Potenzreihendarstellungen von Funktionen aus der Potenzreihendarstellung ihrer Ableitungen herleiten, wie wir im folgenden Beispiel sehen werden.

Beispiel 20.26 (Reihenentwicklung durch gliedweise Integration)

a. Die Potenzreihe zur Exponentialfunktion ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Durch gliedweises Integrieren erhalten wir die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

und diese definiert eine Stammfunktion von exp. Sie unterscheidet sich von der bereits bekannten Stammfunktion exp von exp um die Konstante 1.

b. Die Funktion $f : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(1+x)$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$f' : (-1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Mit Hilfe der geometrischen Reihe sehen wir, daß

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

für alle $x \in (-1, 1)$ gilt. f' ist dort also durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n$ gegeben. Durch gliedweises Integrieren finden wir eine Potenzreihendarstellung einer Stammfunktion von f':

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot t^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot t^n$$

auf dem Intervall $(-1, 1)$. Da auch f auf $(-1, 1)$ eine Stammfunktion von f' ist und zwei Stammfunktionen sich nur um eine Konstante c unterscheiden, werten wir f und diese Potenzreihe in $a = 0$ aus, um c zu bestimmen. Wir erhalten damit

$$c = f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot 0^n = \ln(1) - 0 = 0.$$

Wir haben also eine Potenzreihendarstellung für f auf $(-1, 1)$ gefunden; für $x \in (-1, 1)$ gilt

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n.$$

Daraus ergibt sich dann die Potenzreihendarstellung für den natürlichen Logarithmus

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (x-1)^n$$

für alle $x \in (0, 2)$, d.h. die Taylorreihenentwicklung des natürlichen Logarithmus aus Beispiel 18.34 gilt auf ganz $(0, 2)$, und sie gilt auch im Punkt $a = 2$, wie wir dort bereits gesehen haben.

Aufgaben

Aufgabe 20.27

Sei $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \arctan(x)$.

a. Finde die Taylorreihenentwicklung von f mit Hilfe gliedweiser Integration.

b. Bestimme eine Reihendarstellung für $\frac{\pi}{4}$ und π.

Aufgabe 20.28

Es sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstelle. Zeige, daß $\ln(|f|)$ eine Stammfunktion von $\frac{f'}{f}$ auf I ist.

Aufgabe 20.29

Berechne mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von

$$x \mapsto \frac{x^3}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}.$$

§ 21 Uneigentliche Integrale

Definition 21.1 (Uneigentliche Integrale)

a. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$, und $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[a, y]$ integrierbar für alle $y \in (a, b)$. Falls der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{y \to b} \int_a^y f(x)\, dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

existiert, so nennen wir ihn ein *uneigentliches Integral.* Ist $\int_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}$, so nennen wir das uneigentliche Integral *konvergent.*

b. Es seien $b \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ mit $a < b$, und $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[y, b]$ integrierbar für alle $y \in (a, b)$. Falls der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{y \to a} \int_y^b f(x)\, dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

existiert, so nennen wir ihn ein *uneigentliches Integral.* Ist $\int_a^b f(x)\, dx \in \mathbb{R}$, so nennen wir das uneigentliche Intgral *konvergent.*

c. Es seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $a < b$ und für $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ gebe es ein $c \in (a, b)$, so dass die uneigentlichen Integrale $\int_c^b f(x)\, dx$ und $\int_a^c f(x)\, dx$ konvergent sind, dann nennen wir auch

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

ein *konvergentes uneigentliches Integral.* Aus der Additivität des Integrals folgt, dass die Definition der linken Seite unabhängig von der Wahl von c ist.

Beispiel 21.2

a. Das folgende uneigentliche Integral ist konvergent mit Grenzwert 1:

$$\int_0^\infty \exp(-x)\, dx = \lim_{y \to \infty} \int_0^y \exp(-x) = \lim_{y \to \infty} -\exp(-x)\Big|_0^y = \lim_{y \to \infty} 1 - \exp(-y) = 1.$$

b. Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$. Dann gilt für das uneigentliche Integral

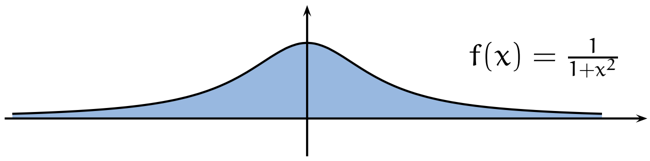
$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{1}{x^a}\, dx &= \lim_{y \to \infty} \int_1^y x^{-a}\, dx = \lim_{y \to \infty} \frac{x^{-a+1}}{-a+1}\Big|_1^y \\ &= \lim_{y \to \infty} \frac{y^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } a < 1, \\ \frac{1}{a-1}, & \text{falls } a > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

c. Das folgende uneigentliche Integral ist konvergent mit Grenzwert 2:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{y \to 1} -2 \cdot \sqrt{1-x}\Big|_0^y = 2 - \lim_{y \to 1} 2 \cdot \sqrt{1-y} = 2.$$

d. Der Flächeninhalt unter dem Graphen von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ist π:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{y\to\infty} \arctan(x)\Big|_0^y + \lim_{y\to-\infty} \arctan(x)\Big|_y^0 \\ &= \lim_{y\to\infty} \arctan(y) - \lim_{y\to-\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$



Bemerkung 21.3
Die *Linearität* und die *Monotonie* des Integrals (siehe Korollar 19.21) sowie die *Additivität* des Integrals (siehe Proposition 19.24) und die *Dreiecksungleichung* für Integrale (siehe Proposition 19.26) gelten analog auch für uneigentliche Integrale. Der Beweis folgt unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen für Integrale zusammen mit den Grenzwertsätzen 13.10.

Lemma 21.4 (Monotoniekriterium für uneigentliche Integrale)
Es sei $a \in \mathbb{R}$ *und* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *mit* $a < b$, *und es sei* $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *integrierbar auf* $[a, y]$ *für alle* $y \in (a, b)$. *Gibt es ein* $s \in \mathbb{R}$ *mit* $\int_a^y f(x)\,dx < s$ *für alle* $y \in (a, b)$, *so ist* $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent.*

Beweis: Die Funktion

$$F : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_a^y f(x)\,dx$$

ist monoton wachsend, da f nur nicht-negative Werte annimmt.

Wir betrachten nun eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die zugehörige Folge $\big(F(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionswerten. Diese ist monoton wachsend und beschränkt durch s, mithin ist sie konvergent, d.h. es gibt ein $I \in \mathbb{R}$ mit

$$\int_a^{a_n} f(x)\,dx = F(a_n) \longrightarrow I.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$I - F(a_n) = |F(a_n) - I| < \varepsilon.$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\int_a^b f(x)\,dx$ gegen I konvergiert und unterscheiden dazu die beiden Fälle $b = \infty$ und $b \in \mathbb{R}$.

1. **Fall:** $b = \infty$**:** Für $\varepsilon > 0$ setzen wir nun $s_\varepsilon := a_{n_\varepsilon}$, so dass für $y \in [a, \infty)$ mit $y > a_{n_\varepsilon}$ dann

$$|F(y) - I| = I - F(y) \leq I - F(a_{n_\varepsilon}) < \varepsilon,$$

gilt, da F monoton wachsend ist. Mithin gilt

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{y\to\infty} F(y) = I.$$

2. Fall: $b \in \mathbb{R}$**:** Für $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta_\varepsilon := b - a_{n_\varepsilon} > 0$, so dass für $y \in [a,b)$ mit $b - y = |y-b| < \delta_\varepsilon = b - a_{n_\varepsilon}$ auch $y > a_{n_\varepsilon}$ und damit

$$|F(y) - I| = I - F(y) \le I - F(a_{n_\varepsilon}) < \varepsilon,$$

gilt, da F monoton wachsend ist. Mithin gilt wieder

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{y\to\infty} F(y) = I.$$

□

Satz 21.5 (Integralkriterium für Reihen)
Es sei $a \in \mathbb{N}$ *und* $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$ *sei monoton fallend und auf* $[a,c]$ *integrierbar für alle* $c \in [a,\infty)$*. Dann gilt:*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ ist konvergent} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{n=a}^\infty f(n) \text{ ist konvergent.}$$

In dieser Situation gilt zudem

$$\sum_{n=a+1}^\infty f(n) \;\le\; \int_a^\infty f(x)\,dx \;\le\; \sum_{n=a}^\infty f(n).$$

Beweis: Für $m \in \mathbb{N}$ mit $m > a$ betrachten wir die Zerlegung

$$Z_m := (a, a+1, a+2, \ldots, m)$$

des Intervalls $[a,m]$. Da f auf $[a,m]$ monoton fallend ist, erhalten wir

$$\sum_{n=a+1}^m f(n) = \mathrm{US}(f, Z_m) \le \int_a^m f(x)\,dx \le \mathrm{OS}(f, Z_m) = \sum_{n=a}^{m-1} f(n). \tag{64}$$

Ist die Reihe $\sum_{n=a}^\infty f(n)$ konvergent und $y \in (a,\infty)$, so wählen wir ein $m \in \mathbb{N}$ mit $y \le m$ und aus (64) folgt dann

$$\int_a^y f(x)\,dx \le \int_a^m f(x)\,dx \le \sum_{n=a}^{m-1} f(n) \le \sum_{n=a}^\infty f(n),$$

so dass das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ nach dem Monotoniekriterium 21.4 konvergent ist.

Ist umgekehrt das Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergent, so ist die Folge der Partialsummen

$$s_m := \sum_{n=a}^m f(n) \overset{(64)}{\le} f(a) + \int_a^m f(x)\,dx \le f(a) + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

monoton wachsend und beschränkt, mithin konvergent.

Die Abschätzung für die Grenzwerte der Reihen und des Integrals folgt unmittelbar aus (64), indem man m gegen unendlich gehen lässt. □

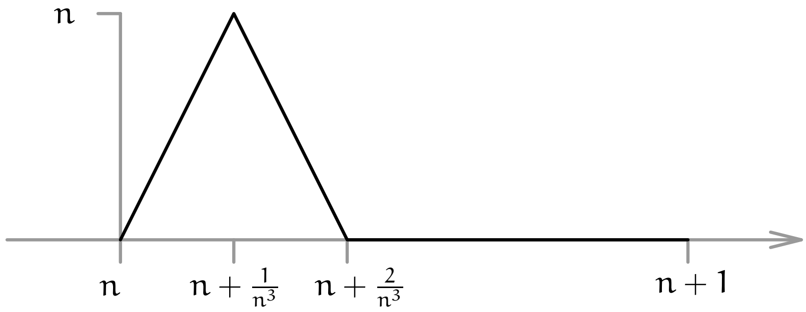
Beispiel 21.6

Ist $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergent, nach Satz 21.5 und Teil b. von Beispiel 21.2 .

Bemerkung 21.7

Wenn $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergiert, so muss *nicht* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ gelten!

Wir betrachten eine Funktion $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $[n, n+1]$ den folgenden Graphen besitzt:



Dann ist

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n^3} \cdot n = \frac{1}{n^2}$$

der Flächeninhalt des obigen Dreiecks. Also ist das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

konvergent, aber $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, da

$$f\left(n + \frac{1}{n^3}\right) = n \longrightarrow \infty.$$

Aufgaben

Aufgabe 21.8

Untersuchen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty x \cdot e^{-tx}\,dx$ konvergiert und bestimmen Sie für diese den Wert des Integrals.

Aufgabe 21.9

a. Zeige Sie, für $y \in (0, \infty)$ ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^{y-1} \cdot \exp(-x)\,dx$$

konvergent.

b. Die Funktion $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto \int_0^\infty x^{y-1} \cdot \exp(-x)\,dx$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(y+1) = y \cdot \Gamma(y)$$

für $y \in (0, \infty)$.

c. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

Aufgabe 21.10

a. Zeigen Sie, für jedes $y \in (0, \infty)$ ist die Funktion

$$g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x+y}$$

streng monoton fallend.

b. Zeigen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums für Reihen, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y} \right)$$

für jedes $y \in (0, \infty)$ konvergiert.

c. Zeigen Sie, die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_n : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

konvergiert auf jedem Intervall $[\delta, \infty)$ mit $\delta > 0$ gleichmäßig gegen

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}.$$

d. Zeigen Sie, die Funktion

$$F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : y \mapsto -\frac{1}{y} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y} \right)$$

ist eine Stammfunktion von f auf $(0, \infty)$ und erfüllt für alle $y \in (0, \infty)$ die Bedingungen $F'(y) > 0$ und $F(y+1) - F(y) = \frac{1}{y}$.

e. Zeigen Sie, ist $G : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $G'(y) \geq 0$ und $G(y+1) - G(y) = \frac{1}{y}$ für alle $y \in (0, \infty)$, so unterscheiden sich F und G nur um eine Konstante.

f. Zeigen Sie, die differenzierbare Funktion

$$H : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \big(\ln\left(\Gamma(x)\right)\big)' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

erfüllt die Bedingungen $H'(y) \geq 0$ und $H(y+1) - H(y) = \frac{1}{y}$ für alle $y \in (0, \infty)$. Man nennt H auch die *Digammafunktion*.

Hinweis zu Teil e.: setzen Sie $F_n(y) = -\frac{1}{y} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y} \right)$ und zeigen Sie $G(y) - F_n(y) = G(y+n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$; nutzen Sie dies, um $(G-F)'(y) \geq 0$ für alle y zu zeigen; zeige ferner, dass $G - F$ 1-periodisch ist und folgern Sie dann, dass $G - F$ konstant ist.

Aufgabe 21.11

Zeigen Sie, $\int_0^1 x^t \cdot \ln(x)^n \, dx = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+t)^{n+1}}$ für alle $t > -1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 21.12 (Cauchy-Kriterium für uneigentliche Integrale)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei auf $[a, y]$ integrierbar für alle $y \in (a, b)$. Zeigen Sie, genau dann existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\ dx$, wenn

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ c_\varepsilon \in [a, b)\ :\ \forall\ c_\varepsilon < s < t < b \ \text{ gilt } \left|\int_s^t f(x)\ dx\right| < \varepsilon.$$

Aufgabe 21.13 (Uneigentliche Integrale beschränkter Funktionen)
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine beschränkte Funktion, die für alle $y \in (a, b)$ auf $[a, y)$ integrierbar ist. Zeigen Sie, dann ist das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\ dx$ konvergent.

Literaturverzeichnis

[Ebb92] Heinz-Dieter Ebbinghaus (ed.), *Zahlen*, 3 ed., Springer, 1992.

[Heu03] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 15 ed., Teubner, 2003.

[SS18] Hermann Schichl and Roland Steinbauer, *Einführung in das mathematische Arbeiten*, Springer, 2018, https://www.mat.univie.ac.at/˜einfbuch/.