Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
24.05.2020
Blatt 07

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 25 (Weierstraßsches Konvergenzkriterium für gleichmäßige Konvergenz). Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren *die Maximumsnorm von f* durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \in [0,\infty) :\ x \in K\} \in [0,\infty),$$

(welche tatsächlich in $[0,\infty)$ liegt, da f sein Supremum annimmt.)

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf K mit der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann $(\sum_1^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f auf K konvergiert. (Hinweis: Für jedes $x \in K$ ist die Konvergenz von $\sum_1^\infty f_n(x)$ sogar absolut.)

Aufgabe 26. Sei P eine formale Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei weiter $f_P\colon I_P \to \mathbb{R}$ die von P induzierte Funktion auf $I_P = (-R_P.R_P)$. Sei weiter P' die formale Ableitung von P.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $0 < r < R$ die Partialsummen f_n von f auf $K_r = [-r, r]$ gleichmäßig gegen $f|K_r$ konvergieren. (Hinweis: Schummeln Sie noch ein s zwischen r und R ein und versuchen Sie dann Aufgabe 25 anzuwenden.)

(b) Zeigen Sie: $R_{P'} = R_P$ (vgl. Aufgabe 23.c). (Hinweis: Verwenden Sie den Weierstraßschen Satz über die Vertauschung von Limites bei Funktionenfolgen und Integration.)

(c) Zeigen Sie nun noch, dass f_P ∞-oft differenzierbar ist und dass Sie unter dem Summenzeichen differenzieren dürfen,

$$f_P' = f_{P'}.$$

Aufgabe 27. (a) Benutzen Sie die geometrische Reihe für $t \mapsto (1+t^2)^{-1}$ und geeignete Vertauschungsargumente, um für alle $x \in (-1,1)$ die folgende Reihendarstellung des Arcustangens zu bekommen:

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Bitte wenden

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe des *Leibnizschen Konvergenzkriteriums* ($\sum_0^\infty (-1)^n a_n$ ist konvergent, falls $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist, vgl. das Weihnachtsblatt in Analysis 1) und des Abelschen Grenzwertsatzes (siehe Aufgabe 24) das folgende Resultat von *G. F. Leibniz*:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 28. Sei X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{F}(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen auf X.

(a) Zeigen Sie, dass

$$V = \{f \in \mathcal{F}(X) : \ f \text{ ist beschränkt}\}$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{F}(X)$ ist.

(b) Wir definieren nun $\|\cdot\|\colon V \to [0, \infty)$ durch

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| \in [0, \infty) : \ x \in X\} \in [0, \infty).$$

Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ einen Norm auf V ist.

Abgabe: Sonntag, 31. Mai 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor