

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 29. (a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass dann für $\|\cdot\|$ die so genannte *Parallelogrammgleichung* gilt: Für alle $v, w \in V$ ist:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(b) Zeigen Sie, dass die *Maximumsnorm* $\|\cdot\|_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ auf \mathbb{R}^n ,

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^n (|x_i|),$$

für $n \geq 2$ nicht von einem Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n kommt.

In einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt ein Tupel $(e_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V *orthonormal*, wenn für alle $i, j \in I$ gilt: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Hier bezeichnet δ_{ij} das *Kroneckersymbol*, d.h.: $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$, und $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$.

Aufgabe 30. Wir betrachten den *Folgenraum* $V := \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit seiner natürlichen Vektorraumstruktur $(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$ und $\lambda \cdot (x_n) := (\lambda x_n)$, für $(x_n), (y_n) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$l^2 := \{(x_n) \in V : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\dim l^2 = \infty$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ein Skalarprodukt auf l^2 gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Folgen $e_n = (\delta_{mn})_{m \in \mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{N}$) orthonormal in l^2 sind.

Aufgabe 31. Sei V der \mathbb{R} -Vektorraum aller 2π -periodischen, stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$$

ein Skalarprodukt auf V gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren c_0, c_n, s_n (für $n \in \mathbb{N}$) mit

$$c_0(x) = 1, \quad c_n(x) = \sqrt{2} \cos(nx), \quad s_n(x) = \sqrt{2} \sin(nx) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

ein Orthonormalsystem von V bilden.

(c) Sei $f \in V$. Zeigen Sie: Wenn es überhaupt eine Reihe von der Form

$$a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n$$

gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so müssen die Koeffizienten a_0, a_n, b_n (für $n \in \mathbb{N}$) die folgenden so genannten *Fourier-Koeffizienten* von f sein:

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

(Die Reihe mit diesen Koeffizienten wird die *Fourier-Reihe* von f genannt.)

Aufgabe 32 (Pfungsaufgabe). Sei X eine Menge und $\mathcal{B}(X)$ der \mathbb{R} -Vektorraum aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X sowie $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm auf $\mathcal{B}(X)$ (vgl. Aufgabe 28). Zeigen Sie, dass $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Abgabe: Sonntag, 14. Juni 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor