Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
15.06.2020
Blatt 09

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 33. (a) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ genau dann konvergiert, wenn ihre Komponentenfolgen $(x_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren $(j = 1, \dots, n)$.

(b) Zeigen Sie, dass die kanonischen Projektionen $\pi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_j$ $(n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n)$ stetig sind.

(c) Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ genau dann stetig ist, wenn ihre Komponentenbbildungen $f_j := \pi_j \circ f \colon X \to \mathbb{R}$ stetig sind $(j = 1, \dots, n)$.

Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *eine Topologie auf* X (und (X, τ) dann ein *topologischer Raum*), wenn für τ folgende Axiomatik gilt: (i) $\emptyset, X \in \tau$; (ii) $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$; (iii) $U_i \in \tau$ $(i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$. (Die Elemente von τ nennt man die *offenen Teilmengen von* X.)

Aufgabe 34. (a) Eine Topologie auf X heißt *Hausdorffsch*, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die von einer Metrik auf X *induzierte Topologie* Hausdorffsch ist.

(b) Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen wird genauso definiert wie in metrischen Räumen. Also wie? Zeigen Sie: Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einem Hausdorffschen topologischen Raum (einem *Hausdorff-Raum*) ist eindeutig bestimmt.

Aufgabe 35. (a) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass A, zusammen mit der induzierten Metrik, vollständig ist.

(b) Sei $\mathcal{B}[a, b]$ der Raum der beschränkten (reellwertigen) Funktionen auf dem Intervall $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ zusammen mit seiner Supremumsnorm (vgl. Aufgabe 32). Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}[a, b] \subseteq \mathcal{B}[a, b]$ abgeschlossen (und damit ein Banachraum) ist.

Aufgabe 36. Zeigen Sie mit Hilfe von folgender Anleitung, dass l^2 (vgl. Aufgabe 30) vollständig ist. (Einen vollständigen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nennt man einen *Hilbertraum*.)

(i) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in l^2. Zeigen Sie, dass die Komponentenfolgen $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind. (Wir setzen dann: $a_n := \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}$.)

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon/2$ ist, für alle $k, l \geq k_0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \geq k_0$ gibt, so dass für alle $k \geq k_n$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(k)} - a_j)^2 < \frac{1}{8}\varepsilon^2.$$

(iii) Benutzen Sie $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ und zeigen Sie durch „Einfügen einer nahrhaften Null“, dass für alle $k \geq k_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(k)} - a_j)^2 < \frac{3}{4}\varepsilon^2.$$

(iv) Zeigen Sie schließlich, dass für $k \geq k_0$ gilt: $x^{(k)} - a \in l^2$, daraus $a \in l^2$ und dann, dass $(x^{(k)}) \to a$ in l^2.

Abgabe: Sonntag, 21. Juni 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor