Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
28.06.2020
Blatt 11

# Übungen zur Analysis II

**Aufgabe 41.** Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(0,0) = 0$ und für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, dass $f$ zweimal partiell differenzierbar ist und berechnen Sie $D_1D_2f(0,0)$ und $D_2D_1f(0,0)$. Was kann man über die Stetigkeit von $D_1D_2f$ und $D_2D_1f$ aussagen?

**Definition.** Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Gebiet, $x_0 \in G$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ gegeben. Es heißt dann $f$ *in $x_0$ in Richtung $v$ differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$D_v f(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + tv) - f(x_0))$$

existiert und es wird dann $D_v f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ *die Richtungsableitung von $f$ im Punkt $x_0$ in Richtung $v$* genannt.

**Aufgabe 42. (a)** Sei nun $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ ($G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, wie immer) in $x_0 \in G$ total differenzierbar. Zeigen Sie, dass $f$ dann in $x_0$ in alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und es gilt: $D_v f(x_0) = Df(x_0)v$.

**(b)** Betrachten wir nun die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x,y) = 1$, falls $x > 0$ und $y = x^2$ ist, sowie $f(x,y) = 0$ sonst. Zeigen Sie, dass $f$ in $(0,0)$ in jede Richtung differenzierbar aber $f$ nicht stetig in $(0,0)$ ist. Kann $f$ da noch total differenzierbar in $(0,0)$ sein?

**Definition.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann nennt man $f$ *harmonisch*, falls $\triangle f = 0$ ist.

**Aufgabe 43.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$ nennt man $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\|x\|)$, und für $n \neq 2$ dann $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \|x\|^{2-n},$$

*das Newton-Potential auf* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $f$ und $g$ harmonisch sind.

**Aufgabe 44. (a)** *Ebene Polarkoordinaten* sind wie folgt gegeben: Sei $G = \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon G \to \mathbb{R}^2$,

$$f(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)).$$

Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_f(r,\varphi) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, für alle $(r,\varphi) \in G$, und zeigen Sie, dass $f$ injektiv ist. Was ist das Bild von $f$?

**Bitte wenden**

**(b)** *Räumliche Polarkoordinaten* kann man so definieren: Sei $G = \mathbb{R}_+ \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $g\colon G \to \mathbb{R}^3$,

$$g(r,\vartheta,\varphi) = (r\sin\vartheta\cos\varphi, r\sin\vartheta\sin\varphi, r\cos\vartheta).$$

Bestimmen Sie für jedes $(r,\vartheta,\varphi) \in G$ die Jacobi-Matrix $J_g(r,\vartheta,\varphi) \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und zeigen Sie, dass $g$ injektiv ist. Was ist das Bild von $f$?

**Abgabe:** Sonntag, 05. Juli 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor