

Übungen zur Analysis II

Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem (reellen) Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass für alle $v \in V$ gilt:

$$c\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C\|v\|_1.$$

Aufgabe 45. (a) Zeigen Sie, dass zwei äquivalente Normen auf einem Vektorraum V die gleiche Topologie auf V (d.h.: die gleichen offenen Mengen) induzieren.

(b) Sei V nun endlich-dimensional. Zeigen Sie, dass je zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf V äquivalent sind. (Hinweis: O.E. sei $V = \mathbb{R}^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) und $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_1$. Betrachten Sie nun $f: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$.)

Definition. Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Ein *Operator* $T: V \rightarrow W$ (d.h.: eine lineare Abbildung) heißt *beschränkt*, falls gilt:

$$\|T\| := \sup\{\|Tv\|_W \in [0, \infty) : \|v\|_V \leq 1\} < \infty.$$

Aufgabe 46. Seien V und W normierte Vektorräume und $T: V \rightarrow W$ ein Operator. Zeigen Sie,

(a) dass T genau dann stetig (überall) ist, wenn T stetig in 0 ist;

(b) dass T stetig ist, genau wenn T beschränkt ist;

(c) dass für $\dim V < \infty$ jeder Operator T stetig ist.

Aufgabe 47. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $x_0 \in G$ und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ (total) differenzierbar in x_0 . Zeigen Sie:

(a) Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gibt es eine differenzierbare Kurve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ ($\varepsilon > 0$ geeignet), so dass gilt: $\alpha(0) = x_0$ und $\dot{\alpha}(0) = v$.

(b) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ und α wie unter (a), so gilt:

$$Df(x_0)v = (f \circ \alpha)'(0).$$

Aufgabe 48. Die *Wärmeleitungsgleichung* ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$, gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f.$$

Bitte wenden

Hier bei ist Δ der Laplace-Operator in x -Richtung. Zeigen Sie, dass der so genannte *Wärmeleitungskern*,

$$f(t, x) = t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4t}\right),$$

diese *partielle Differentialgleichung* erfüllt.

Abgabe: Sonntag, 12. Juli 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor