Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
13.07.2020
Blatt 13

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 49. Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $c > 0$. Zeigen Sie, dass $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(t,x) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

(„einlaufende und auslaufende Welle") zweimal stetig differenzierbar ist und der folgenden *Wellengleichung* genügt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Aufgabe 50. Sei $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0\}$ und $f\colon G \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-y)/(x+y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom von f der Ordnung 2 in $(1,1)$.

Aufgabe 51. Wir betrachten die zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(x^2 + 4y^2).$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad}(f)(x,y) \in \mathbb{R}^2$, für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, und zeigen Sie, dass f höchstens in $(x_0, y_0) := (0,0)$ ein lokales Minimum haben kann.

(b) Berechnen Sie nun $\operatorname{Hess}(f)(0,0)$ und zeigen Sie, dass f in (x_0, y_0) ein striktes lokales Minimum hat.

(c) Schauen Sie noch einmal die Funktionsvorschrift von f an und zeigen Sie dann, dass f in (x_0, y_0) sogar ein *striktes globales Minimum* hat.

Aufgabe 52. Wir identifizieren $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{GL}_n\mathbb{R} = \{A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} :\ A \text{ ist invertierbar}\} \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$$

offen ist und die Abbildung $F\colon \mathrm{GL}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, $A \mapsto A^{-1}$, stetig differenzierbar. (Hinweis: $\det\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Drücken Sie A^{-1} mit Hilfe der Adjunkten von A aus.)

(b) Zeigen Sie, dass für das Differential $DF_A\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ von F in jedem $A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ gilt:

$$DF_A(B) = -A^{-1}BA^{-1}.$$

(Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 47, um $DF_A(B)$ zu berechnen und $F(C)C = \mathbf{1}_n$, für alle $C \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$.)

Abgabe: Sonntag, 19. Juli 2020, 18 Uhr via „urm" an Ihren Tutor