Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
19.07.2020
Blatt 14

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 53. Wir betrachten noch einmal das cartesische Blatt $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ mit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2 - x^2(x + 1)$ (vgl. Aufgabe 11). Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in C$, um die man $F(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen kann und jene, wo man lokal nach x auflösen kann. Um welchen Punkt $(x_0, y_0) \in C$ kann man lokal weder nach x noch nach y auflösen? Begründe.

Aufgabe 54. Wir betrachten das folgende (nicht-lineare) Gleichungssystem (GLS) in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 - y_2^2 &= \sin(y_1 y_2) - \cos(x_2 y_1) \\ x_2 - y_1 &= \exp(x_1 x_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass man dieses GLS lokal um $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, -1, 0)$ nach (y_1, y_2) auflösen kann. Ist $x \mapsto (x, f(x))$ für x nahe bei $(1, 0)$ die Lösung des Systems, so bestimme man $Df(1, 0)$.

Aufgabe 55. Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2, e^{xy})$.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, die eine offene Umgebung U besitzen, so dass $f|U$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

(b) Bestimmen Sie ein maximales Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass $f|G : G \to f(G)$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 56. Zeigen Sie, dass die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, genau ein globales Maximum unter der Nebenbedingung $x^4 + y^4 = 1$ hat und bestimmen Sie dieses.

Abgabe: Sonntag, 26. Juli 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor