Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
24.07.2020
Blatt 15

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 57. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $Df(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertierbar, für alle $x \in G$, so ist auch $D := f(G) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{R}$ ein Gebiet. Zeigen Sie, dass G dann ein offenes Intervall ist.

Aufgabe 58. (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $f'(x) \neq 0$, für alle $x \in I$, so ist f ein (globaler) Diffeomorphismus auf sein Bild.

(b) Sei $G = (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ und f gegeben durch $f(r, \varphi) = (r \cos\varphi, r \sin\varphi)$. Bestimmen Sie $D := f(G) \subseteq \mathbb{R}^2$ und zeigen Sie, dass f zwar lokaler Diffeomorphismus, nicht aber globaler Diffeormorphismus ist.

Aufgabe 59 (Satz über die Hauptachsentransformation). Sei $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ symmetrisch $(n \in \mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass A einen (reellen) Eigenwert hat. (Hinweis: Bertrachten Sie die zu A gehörende quadratische Form unter der Nebenbedingung $\|x\|^2 = 1$.)

Aufgabe 60. Beweisen Sie den Satz über Implizite Funktionen mit Hilfe des Umkehrsatzes. (Hinweis: Ist $F\colon G \to \mathbb{R}^m$, mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, die stetig differenzierbare Funktion, deren Nullstellengebilde man lokal nach y auflösen möchte, so betrachte man $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, gegeben durch $\Phi(x, y) = (x, F(x, y))$.)

Abgabe: Dienstag, 28. Juli 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor