Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
14.04.2020
Blatt 01

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 1 (Anwendungen zur Regel von l'Hôpital). Die *Regel von l'Hôpital* (vgl. Aufgabe 55, Blatt 15 von Analysis I) gilt auch für Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$, die am Rand des Definitionsbereiches eines offenen Intervalls $I = (a, b)$ liegen, wobei auch die Fälle $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen sind und auch, wenn Zähler und Nenner beide gegen ∞ gehen: Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$, für alle $x \in I$ sowie $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (für $x_0 = a$ oder $x_0 = b$), so gilt: Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x) =: c \in \mathbb{R}$, so ist $g(x) \neq 0$, für alle x nahe bei x_0 (bzw. groß/klein genug, wenn $x_0 = \pm\infty$ ist), es konvergiert auch $f(x)/g(x)$ für $x \to x_0$ und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Zeigen Sie damit, dass die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}, \qquad \lim_{x\to\infty} x \ln(\frac{x+1}{x-1}).$$

Aufgabe 2 (Anwendungen zur Partiellen Integration). Versuchen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen durch Verknüpfungen von bekannten Funktionen auszudrücken, indem Sie auf ihre Integralfunktionen partielle Integration anwenden:

$$f(x) = xe^{-x} \ (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) = \ln(x) \ (x > 0).$$

Aufgabe 3 (Anwendungen zur Substitutionsregel). Versuchen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ durch Verknüpfungen bekannter Funktionen auszudrücken, indem Sie auf ihre Integralfunktionen die Substitutionsregel anwenden. (Hinweis: Bei einer könnten Sie zudem die so genannte *Partialbruchentwicklung* gebrauchen.)

$$f(x) = xe^{-x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

Aufgabe 4. (a) Zeigen Sie für alle $x > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$:

$$\ln(x^r) = r \ln(x).$$

(b) Zeigen Sie für alle $x > 0$ und $y > 0$:

$$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y).$$

Abgabe: Dienstag, 21. April 2020, 10 Uhr via e-Mail an Ihren Tutor