Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
21.04.2020
Blatt 02

# Übungen zur Analysis II

**Aufgabe 5** (Die Hyperbelfunktionen). Seien $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Hyperbelfunktionen aus der Vorlesung.

**(a)** Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

**(b)** Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$\cosh'(x) = \sinh(x), \qquad \sinh'(x) = \cosh(x).$$

**(c)** Zeigen Sie die Funktionalgleichungen für cosh und sinh: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

**Aufgabe 6** (Die Area-Funktionen).

**(a)** Zeigen Sie, dass $\cosh|(0,\infty)\colon (0,\infty) \to (1,\infty)$ und $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv sind, ihre Umkehrfunktionen
$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} &:= (\cosh|(0,\infty))^{-1}\colon (1,\infty) \to (0,\infty) \\ \operatorname{arsinh} &:= \sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$
(gesprochen: „Areacosinus hyperbolicus“ und „Areasinus hyperbolicus“) differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen. Skizzieren Sie ihre Graphen.

**(b)** Bestimmen Sie einen Ausdruck einer Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, der neben den elementaren Funktionen, die wir bisher kennen, nur noch die Area-Funktionen enthalten soll. (Hinweis: Substituiere $x = \sinh(t)$ und integriere danach partiell.)

**Aufgabe 7** (Kurvendiskussion). Wir definieren $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^x$.

**(a)** Zeigen Sie, dass $f$ stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'$.

**(b)** Begründen Sie mit dem Satz von Weierstraß und einer Nullstellenuntersuchung von $f'$, dass $f$ genau eine (globale) Minimalstelle $x_0$ hat und berechnen Sie diese. Wie groß ist dieses Minimum $f(x_0)$ von $f$ in etwa?

**(c)** Bestimmen Sie, falls existent,
$$\lim_{x\to 0} x^x$$
(was ein guter Kandidat für eine Definition von „$0^0$“ wäre) und zeigen Sie: $f$ ist auf $(0, x_0)$ streng monoton fallend und auf $(x_0, \infty)$ streng monoton wachsend. Skizzieren sie ihren Graphen.

**bitte wenden**

**Aufgabe 8** (Das unbestimmte Integral). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $\mathcal{C}^1(I)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $I$ und $V \subseteq \mathcal{C}^1(I)$ der Untervektorraum, bestehend aus den konstanten Funktionen auf $I$. Sei weiter $\mathcal{C}^0(I)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf $I$.

**(a)** Zeigen Sie (mit dem Homomorphiesatz der Linearen Algebra oder direkt von Hand), dass das Ableiten

$$D\colon \mathcal{C}^1(I) \to \mathcal{C}^0(I),\ F \mapsto F'$$

(genau) eine lineare Abbildung $\bar{D}\colon \mathcal{C}^1(I)/V \to \mathcal{C}^0(I)$ mit $\bar{D} \circ \pi = D$ induziert, wo $\pi$ die kanonische Projektion von $\mathcal{C}^1(I)$ nach $\mathcal{C}^1(I)/V$ bezeichnet.

**(b)** Zeigen Sie, dass $\bar{D}$ ein Isomorphismus ist. (Wir bezeichnen mit $\bar{D}^{-1}(f) \in \mathcal{C}^1(I)/V$ das *unbestimmte Integral von $f$*, sprechen auch vom *Aufleiten von $f$* und notieren diese Äquivalenzklasse von Funktionen etwas salopp (ohne untere und obere Grenze) mit

$$\int f(x)dx.)$$

**Abgabe:** Sonntag, 26. April 2020, 18 Uhr bitte bei „urm“ hochladen