Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose

SoSe 2020
27.04.2020
Blatt 03

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 9. (a) Sei $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$ der rechte Ast der Einheitshyperbel und $P = (a, b) \in H$ mit $b > 0$. Sei weiter $P' = (a, -b)$, $o = (0, 0)$ und F der Flächeninhalt des Sektors, der von den Strecken $\overline{oP}$, $\overline{oP'}$ und H begrenzt wird. Zeigen Sie:

$$a = \cosh(F), \quad b = \sinh(F).$$

(Hinweis: Lösen Sie die Hyperbelgleichung nach x auf, $x = \sqrt{1 + y^2}$, und benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 6b. Anmerkung: $F = \operatorname{arcosh}(a) = \operatorname{arsinh}(b)$ ist also der Flächeninhalt einer *Fläche* („Area“) und nicht wie bei den Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen arccos und arcsin die Länge eines *Bogens* („Arcus“).)

(b) Da cosh und sinh nur „Spielarten“ der Exponentialfunktion sind, verwundert es vielleicht nicht, dass sich $\operatorname{arcosh}: (1, \infty) \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch den Logarithmus ausdrücken lassen. Zeigen Sie für alle x aus dem jeweiligen Definitionsbereich:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Aufgabe 10 (Der Tangens hyperbolicus). Wir definieren den *Tangens hyperbolicus* $\tanh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass tanh stetig differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x).$$

Machen Sie eine Kurvendiskussion für tanh und skizzieren Sie seinen Graphen.

(b) Zeigen Sie die folgende Funktionalgleichung für tanh. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}.$$

Aufgabe 11 (a) (Das cartesische Blatt). Das *cartesische Blatt* $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 - x^3 - x^2 = 0\}.$$

Machen Sie eine Zeichnung von C und geben Sie eine *Parametrisierung von C* (d.h.: eine Parametrisierung, so dass C die Spur ist) $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an. (Hinweis: Schneiden Sie, ähnlich wie in der Vorlesung beim Einheitskreis, die Gerade durch $(0, 0)$ mit Steigung $t \in \mathbb{R}$ mit C.)

Bitte wenden

(b) (Die Neillsche Parabel). Die *Neillsche Parabel* $N \subseteq \mathbb{R}^2$ ist gegegeben durch

$$N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 - x^3 = 0\}.$$

Machen Sie eine Skizze von N und geben Sie eine Parametrisierung $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von N an. (Hinweis: Verwenden Sie dengleichen Kniff wie unter (a).) Was kann man für $\dot{\beta}(t_0)$ sagen, wenn $\beta(t_0) = (0, 0)$ ist?

Aufgabe 12 (Die Differentialgleichung für exponentielles Wachstum bzw. exponentiellen Zerfall). **(a)** Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es zu jeder Lösung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der *Differentialgleichung*

$$f' = \lambda f$$

genau ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = c \exp(\lambda x)$. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto f(x) \exp(-\lambda x)$.)

(b) Zeigen Sie: Für $\lambda > 0$ gibt es für jede Lösung $f \neq 0$ genau ein $T > 0$, so dass $f(x + T) = 2f(x)$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ (so genannte *Verdoppelungszeit*). Für $\lambda < 0$ gibt es für jede Lösung $f \neq 0$ genau ein $T > 0$, so dass $f(x+T) = \frac{1}{2} f(x)$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ (so genannte *Halbwertzeit*). Berechnen Sie $T(\lambda)$ in beiden Fällen.

Abgabe: Sonntag, 3. Mai 2020, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor