

Übungen zur Analysis II

Aufgabe 13. (a) Sei

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2y = 0\}$$

die *Einheitsparabel*. Geben Sie eine Parametrisierung von P an und berechnen Sie die Länge des Parabelstückes zwischen $(-1, 1/2)$ und $(1, 1/2)$. (Hinweis: Aufgabe 6b)

(b) Sei $H \subseteq \mathbb{R}^2$ der rechte Ast der Einheitshyperbel (vgl. Aufgabe 09) und $P = (\cosh(F), \sinh(F))$ für $F > 0$. Geben Sie einen Ausdruck für die Bogenlänge von H zwischen $(1, 0)$ und P an.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

die (*Standard*-) *Ellipse* mit den *Hauptsachsen* a und b . Machen Sie eine Zeichnung von $E \subseteq \mathbb{R}^2$, geben Sie eine Parametrisierung von E mit Hilfe der Kreisfunktionen $\cos$ und $\sin$ an und dann einen Ausdruck für die Bogenlänge von E .

Aufgabe 14. (a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'' - f = 0.$$

Zeigen Sie, dass es (genau) zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f = a \cosh + b \sinh$ ist. (Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in der Vorlesung bei $\cos$ und $\sin$ vor.)

(b) (Die Schwingungsgleichung)

(i) Sei $\omega > 0$. Zeigen Sie, dass es für jede Lösung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der *Schwingungsgleichung*

$$f'' + \omega^2 f = 0$$

(eindeutige) Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x).$$

(ii) Zeigen Sie, dass es für jede Lösung $f \neq 0$ der Schwingungsgleichung ein minimales $T > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x + T) = f(x)$. Berechnen Sie T in Abhängigkeit von ω . ($T > 0$ heißt die *Periode* von f und $\omega > 0$ die *Frequenz* von f .)

Aufgabe 15 (Die Differentialgleichung des Tangens und seine Funktionalgleichung).

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die der Differentialgleichung $f' = 1 + f^2$ genügt. Zeigen Sie, dass dann ein (eindeutiges) $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in I$ gilt: $f(x) = \tan(x + c)$. (Hinweis: Betrachte die Funktion $\arctan \circ f$.)

Bitte wenden

(b) Seien $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$, so dass auch noch $x + y \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist. Zeigen Sie, dass dann (der Nenner der rechten Seite ungleich Null ist und es) gilt:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Aufgabe 16 (Taylor-Polynome). (a) Sei $a = 0$ und $n \in \mathbf{N}_0$ beliebig. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $P_{n,0}^f$ für $f = \cosh$ und $f = \sinh$.

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Polynome der Ordnung 5 im Nullpunkt für die Funktionen Tangens und Arcussinus.

Abgabe: Sonntag, 10. Mai 2020, 18 Uhr via Hochladen auf „urm“ bei Ihrem Tutor