Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
04.05.2020
Blatt 03

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 09. (a) Sei $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - y^2 = 1, \; x > 0\}$ der rechte Ast der Einheitshyperbel und $P = (a, b) \in H$ mit $b > 0$. Sei weiter $P' = (a, -b)$, $o = (0, 0)$ und F der Flächeninhalt des Sektors, der von den Strecken $\overline{oP}$, $\overline{oP'}$ und H begrenzt wird. Zeigen Sie:

$$a = \cosh(F), \quad b = \sinh(F).$$

(Hinweis: Lösen Sie die Hyperbelgleichung nach x auf, $x = \sqrt{1 + y^2}$, und benutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 6b. Anmerkung: $F = \operatorname{arcosh}(a) = \operatorname{arsinh}(b)$ ist also der Flächeninhalt einer *Fläche* („Area") und nicht wie bei den Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen arccos und arcsin die Länge eines *Bogens* („Arcus").)

(b) Da cosh und sinh nur „Spielarten" der Exponentialfunktion sind, verwundert es vielleicht nicht, dass sich $\operatorname{arcosh}\colon (1, \infty) \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch den Logarithmus ausdrücken lassen. Zeigen Sie für alle x aus dem jeweiligen Definitionsbereich:

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Lösungsvorschlag.

(a) Die Situation ist in Abbildung 1 dargestellt.

Den Flächeninhalt F können wir berechnen indem wir vom Flächeninhalt des Dreiecks oPP' den Flächeninhalt der Fläche begrenzt durch $\overline{PP'}$ und H abziehen. Um letzteren zu erhalten können wir die Hyperbelgleichung nach x auflösen (bemerke, dass $x > 0$) und die so erhaltene Funktion um a auf der x-Achse nach unten verschieben. Unterhalb der y-Achse liegt dann die gesuchte Fläche. Integrieren wir nun also von $-b$ bis b so erhalten wir den entsprechenden Flächeninhalt mit negativem Vorzeichen. Da der Flächeninhalt des Dreiecks oPP' durch ab gegeben ist, erhalten wir F, unter Benutzung von $a = \sqrt{1 + b^2}$

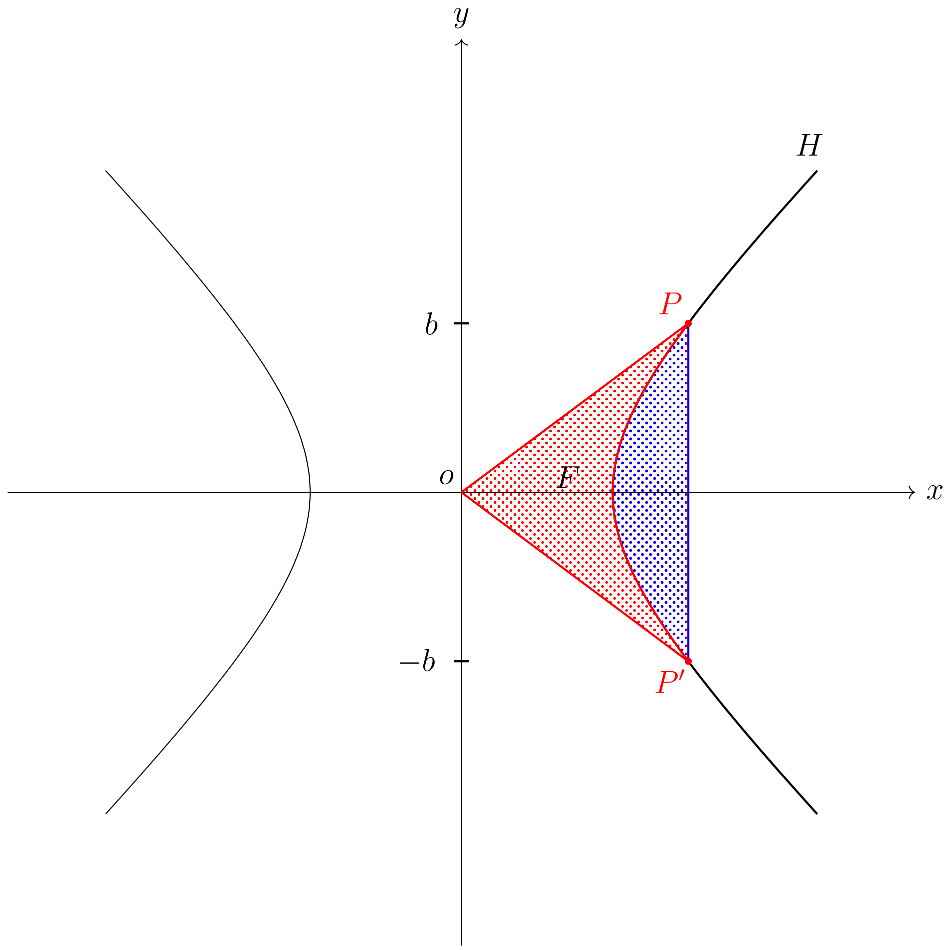

Abbildung 1: Einheitshyperbel, in rot: Flächeninhalt F, in blau: vom Dreieck oPP' abzuziehender Flächeninhalt

und der Stammfunktion die wir aus Aufgabe 6 kennen, durch

$$
\begin{aligned}
F &= ab + \int_{-b}^{b} -a + \sqrt{1+y^2}\mathrm{d}y \\
&= ab - [ay]_{-b}^{b} + \int_{-b}^{b} \sqrt{1+y^2}\mathrm{d}y \\
&= -ab + \left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arsinh}(y)\right)\right]_{-b}^{b} \\
&= -b\sqrt{1+b^2} + \left(\frac{1}{2}\left(b\sqrt{1+b^2} + \operatorname{arsinh}(b)\right) - \frac{1}{2}\left((-b)\sqrt{1+(-b)^2} + \operatorname{arsinh}(-b)\right)\right) \\
&= -b\sqrt{1+b^2} + \left(\frac{1}{2}\left(b\sqrt{1+b^2} + \operatorname{arsinh}(b)\right) + \frac{1}{2}\left(b\sqrt{1+b^2} + \operatorname{arsinh}(b)\right)\right) \\
&= \operatorname{arsinh}(b)
\end{aligned}
$$

Hier haben wir benutzt, dass arsinh ungerade ist, weil sinh ungerade ist,

$$\begin{aligned}\operatorname{arsinh}(-b) &= \operatorname{arsinh}(-\sinh(\operatorname{arsinh}(b))) \\ &= \operatorname{arsinh}(\sinh(-\operatorname{arsinh}(b))) \\ &= -\operatorname{arsinh}(b)\end{aligned}$$

Also gilt $\sinh(F) = b$ und somit auch

$$a = \sqrt{1 + \sinh(F)^2} = \cosh(F)$$

(b) Wir bemerken zunächst dass der ln für beide Argumente definiert ist, da für $x \in (1, \infty)$ gilt, dass

$$x + \sqrt{x^2 - 1} \geq x > 0$$

und für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x| \geq 0$$

Bemerke weiterhin, dass

$$\cosh(x) + \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = e^x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(i) Sei $x \in (1, \infty)$, dann existiert wegen der Bijektivität von $\cosh|(0,\infty)\colon (0, \infty) \to (1, \infty)$ (siehe Aufgabe 6) genau ein $t \in (0, \infty)$ sodass $\cosh(t) = x$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) &= \ln\left(\cosh(t) + \sqrt{\cosh(t)^2 - 1}\right) \\ &= \ln\left(\cosh(t) + \sqrt{\sinh(t)^2}\right) \\ &= \ln\left(\cosh(t) + \sinh(t)\right) \qquad (*) \\ &= \ln(e^t) \\ &= t \\ &= \operatorname{arcosh}(\cosh(t)) \\ &= \operatorname{arcosh}(x)\end{aligned}$$

wobei wir bei $(*)$ verwendet haben, dass $\sinh(t) > 0$ ist für $t > 0$.

(ii) Sei $x \in \mathbb{R}$, dann existiert wegen der Bijektivität von sinh (siehe Aufgabe 6) genau ein $t \in \mathbb{R}$ sodass $\sinh(t) = x$. Damit gilt ähnlich wie in (i)

$$\begin{aligned}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= \ln\left(\sinh(t) + \sqrt{\sinh(t)^2 + 1}\right) \\ &= \ln\left(\sinh(t) + \sqrt{\cosh(t)^2}\right) \\ &= \ln\left(\sinh(t) + \cosh(t)\right) \qquad (*) \\ &= \ln(e^t) \\ &= t \\ &= \operatorname{arsinh}(\sinh(t)) \\ &= \operatorname{arsinh}(x)\end{aligned}$$

wobei wir bei $(*)$ verwendet haben, dass $\cosh(t) > 0$ ist für $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10 (Der Tangens hyperbolicus). Wir definieren den *Tangens hyperbolicus* $\tanh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass tanh stetig differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x).$$

Machen Sie eine Kurvendiskussion für tanh und skizzieren Sie seinen Graphen.

(b) Zeigen Sie die folgende Funktionalgleichung für tanh. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Da wir aus Aufgabe 5 wissen, dass sinh und cosh stetig differenzierbar sind und weil $\cosh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt aus der Quotientenregel die stetige Differenzierbarkeit von tanh und es gilt

$$\begin{aligned}\tanh'(x) &= \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh(x)^2} \\ &= \frac{\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2}{\cosh(x)^2} \\ &= 1 - \tanh^2(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir machen nun eine Kurvendiskussion.

(i) Da $\cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $\tanh(x) = 0$ genau dann wenn $\sinh(x) = 0$. Die einzige Nullstelle von tanh liegt also bei $x_0 = 0$.

(ii) Da cosh gerade ist und sinh ungerade, folgt dass auch tanh ungerade ist, also

$$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Für die Untersuchung auf lokale Extrema und Sattelpunkte sowie Monotonie betrachten wir die Ableitung von tanh. Sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt unter Benutzung von $\cosh(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ (bei $(*)$), dass

$$\begin{aligned}\tanh'(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \tanh^2(x) < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \tanh(x) < 1 \quad \wedge \quad \tanh(x) > -1 \\ &\Leftrightarrow \quad \sinh(x) < \cosh(x) \quad \wedge \quad \sinh(x) > -\cosh(x) \qquad (*) \\ &\Leftrightarrow \quad e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x} \quad \wedge \quad e^x - e^{-x} > -e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \quad e^{-x} > 0 \quad \wedge \quad e^x > 0\end{aligned}$$

Da die letzte Aussage aber wahr ist für alle $x \in \mathbb{R}$, ist tanh streng monoton wachsend, hat also insbesondere keine lokalen Extrema oder Sattelpunkte.

(iv) Zur Untersuchung auf Wendepunkte betrachten wir die zweite und dritte Ableitung. Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$
\begin{aligned}
\tanh''(x) &= -2\tanh(x) \cdot \tanh'(x) \\
\tanh'''(x) &= -2\tanh'(x)^2 - 2\tanh(x) \cdot \tanh''(x)
\end{aligned}
$$

Nun wissen wir aus (iii) dass $\tanh'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und aus (i), dass tanh genau eine Nullstelle hat bei $x_0 = 0$. Damit hat auch $\tanh''$ genau eine Nullstelle bei $x_0 = 0$. Weiterhin ist

$$
\tanh'''(0) = -2\tanh'(0)^2 - 2\tanh(0) \cdot \tanh''(0) = -2\tanh'(0)^2 < 0
$$

und somit hat tanh bei $x_0 = 0$ eine Wendestelle und die Steigung wächst bis zu dieser Stelle und nimmt danach wieder ab.

(v) Wir untersuchen noch das Verhalten im Unendlichen. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \tanh(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Da wir aus (ii) bereits wissen, dass tanh ungerade ist, folgt auch

$$
\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1
$$

(vi) Der Graph von tanh ist in Abbildung 4 gezeigt.

(b) Aus den Funktionalgleichungen für cosh und sinh folgt für $x, y \in \mathbb{R}$ dass

$$
\begin{aligned}
\tanh(x+y) &= \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} \\
&= \frac{\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)} \\
&= \frac{\frac{1}{\cosh(x)\cosh(y)}}{\frac{1}{\cosh(x)\cosh(y)}} \cdot \frac{\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)}{\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)} \\
&= \frac{1 \cdot \tanh(y) + \tanh(x) \cdot 1}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} \\
&= \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)}
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder $\cosh(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwendet haben.

Aufgabe 11. (a) (Das cartesische Blatt). Das *cartesische Blatt* $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$
C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2 - x^3 - x^2 = 0\}.
$$

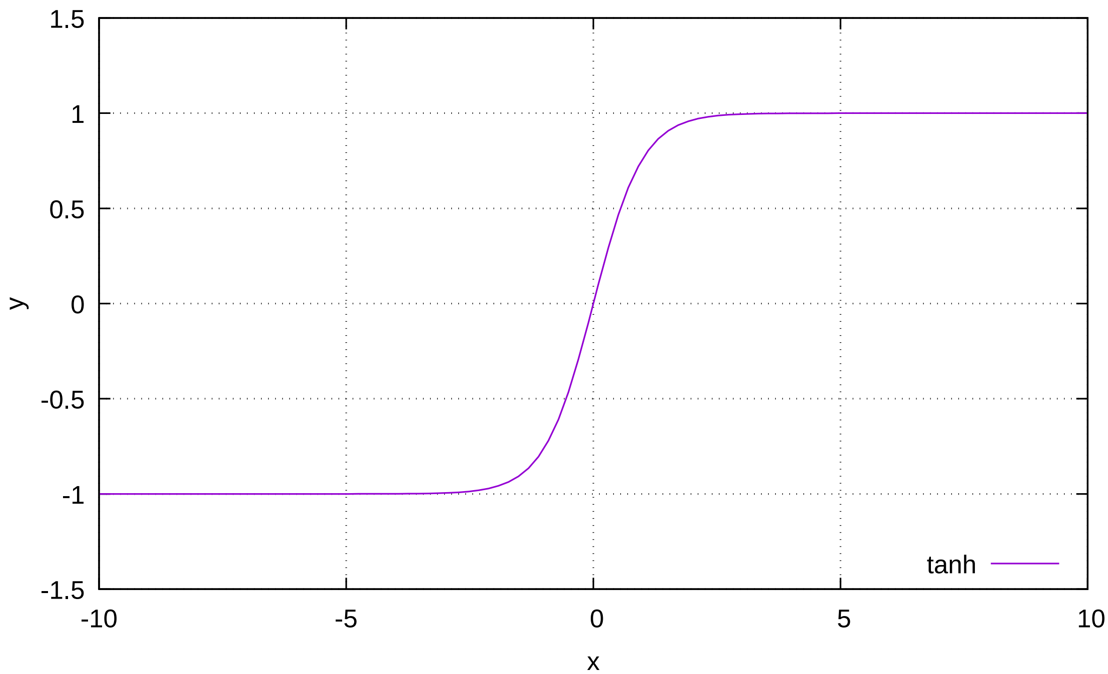

Abbildung 2: Skizze des Graphen von tanh

Machen Sie eine Zeichnung von C und geben Sie eine *Parametrisierung von* C (d.h.: eine Parametrisierung, so dass C die Spur ist) $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ an. (Hinweis: Schneiden Sie, ähnlich wie in der Vorlesung beim Einheitskreis, die Gerade durch $(0,0)$ mit Steigung $t \in \mathbb{R}$ mit C.)

(b) (Die Neillsche Parabel). Die *Neillsche Parabel* $N \subseteq \mathbb{R}^2$ ist gegegeben durch

$$N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 - x^3 = 0\}.$$

Machen Sie eine Skizze von N und geben Sie eine Parametrisierung $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ von N an. (Hinweis: Verwenden Sie dengleichen Kniff wie unter (a).) Was kann man für $\dot{\beta}(t_0)$ sagen, wenn $\beta(t_0) = (0,0)$ ist?

Lösungsvorschlag.

(a) Ein Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ liegt genau dann in C wenn er die Gleichung

$$y^2 - x^3 - x^2 = 0 \tag{1}$$

erfüllt. Anhand Gleichung (1) beobachten wir zunächst für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, dass $(x,y) \in C$ genau dann wenn $(x,-y) \in C$. Aus Symmetriegründen betrachten wir deshalb nur den ersten und dritten Quadranten des $\mathbb{R}^2$. Weiter beobachten wir für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$0 \leq y^2 = x^3 + x^2 = x^2\,(x+1) \qquad \Rightarrow \qquad x \geq -1$$

Also muss für $(x,y) \in C$ insbesondere $x \geq -1$ gelten. Wir gehen nun vor wie im Hinweis vorgeschlagen. Wir definiernen eine „Geradenschar“ die sowohl den ersten als auch dritten Quadranten ausfüllt und hoffen, dass jede Gerade nur abzählbar viele Punkte mit C

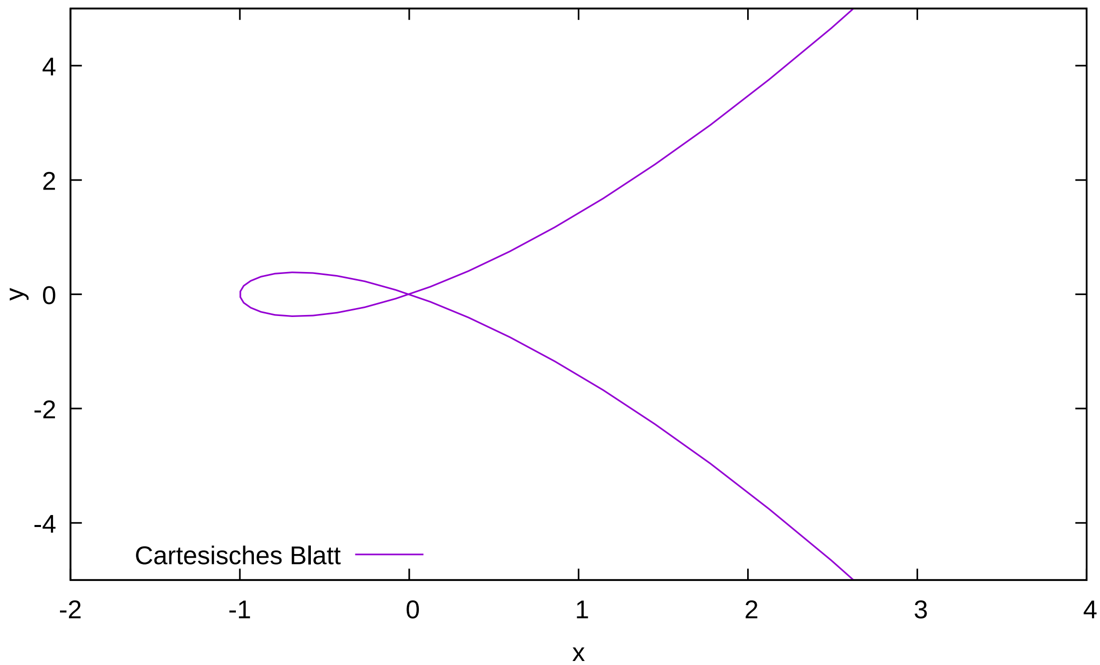

Abbildung 3: Skizze des cartesischen Blatts

gemeinsam hat. Wenn man weiter noch die Symmetrie in Betracht zieht um weitere „Schnittpunkte“ zu erhalten, sollte sich dann eine Vermutung für eine Parametrisierung von C ergeben, indem man sozusagen alle Schnittpunkte „nacheinander“ durchgeht. Sei also $t \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} \lambda_t \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (s, t \cdot s) \end{aligned}$$

Wir wollen für jedes t den Schnitt der Mengen $\operatorname{im}(\lambda_t)$ und C bestimmen. D.h. für gegebenes t suchen wir alle $s \in \mathbb{R}$ sodass $\lambda_t(s) \in C$. $\lambda_t(s) \in C$ gilt aber genau dann wenn $\lambda_t(s)$ Gleichung (1) erfüllt. Also genau dann wenn

$$(ts)^2 - s^3 - s^2 = 0$$

Nun ist aber im Kontext $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (ts)^2 - s^3 - s^2 = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad s^3 + s^2 = t^2 s^2 \\ &\Leftrightarrow \qquad s = t^2 - 1 \quad \vee \quad s = 0 \end{aligned}$$

Damit bekommen wir für jedes t die beiden Schnittpunkte $(t^2 - 1, t^3 - t)$ und $(0, 0)$. Der Punkt $(0, 0)$ ist aber für $t = 1$ im ersten Fall bereits enthalten. Wir vermuten also, dass

$$\begin{aligned} \alpha_C \colon (-\infty, \infty) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(t^2 - 1, t^3 - t\big) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung von C ist. Offensichtlich ist α_C stetig differenzierbar. Um zu zeigen, dass α_C eine Parametrisierung von C ist müssen wir zeigen, dass $\operatorname{im}(\alpha_C)$ gleich C ist.

Die Inklusion $\operatorname{im}(\alpha_C) \subseteq C$ rechnet man leicht nach, indem man $\alpha_C(t)$ in Gleichung (1) einsetzt: Sei also $t \in \mathbb{R}$ dann ist

$$\begin{aligned}\left(t^3 - t\right)^2 - \left(t^2 - 1\right)^3 - \left(t^2 - 1\right)^2 &= t^6 - 2t^4 + t^2 \\ &\quad - \left(t^6 - 2t^4 + t^2 - t^4 + 2t^2 - 1\right) \\ &\quad - \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

Für die umgekehrte Inklusion sei $(x, y) \in C$. Wir wollen zeigen, dass es $t \in \mathbb{R}$ gibt sodass

$$x = t^2 - 1 \qquad \wedge \qquad y = t\left(t^2 - 1\right)$$

Wir unterscheiden vier Fälle:

(i) Ist $x, y \geq 0$ oder $x, y \leq 0 \wedge (x, y) \neq (0, 0)$ dann ist Gleichung (1) äquivalent zu $y = x\sqrt{x+1}$ und wir können $t = \sqrt{x+1}$ wählen (da $x \geq -1$) , denn

$$\sqrt{x+1}^2 - 1 = x + 1 - 1 = x$$

und

$$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}^2 - 1\right) = \sqrt{x+1}\,(x + 1 - 1) = \sqrt{x+1}x = y$$

(ii) Ist $x > 0 \wedge y < 0$ oder $x < 0 \wedge y > 0$ dann ist Gleichung (1) äquivalent zu $y = -x\sqrt{x+1}$ und wir können $t = -\sqrt{x+1}$ wählen (da $x \geq -1$), denn

$$\left(-\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x + 1 - 1 = x$$

und

$$-\sqrt{x+1}\left(\left(-\sqrt{x+1}\right)^2 - 1\right) = -\sqrt{x+1}\,(x + 1 - 1) = -\sqrt{x+1}x = y$$

Also gilt auch $C \subseteq \operatorname{im}(\alpha_C)$ und somit $\operatorname{im}(\alpha_C) = C$. Damit ist dann α_C eine Parametrisierung von C.

(b) Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ liegt genau dann in N wenn er die Gleichung

$$y^2 - x^3 = 0 \tag{2}$$

erfüllt. Anhand der Gleichung (2) beobachten wir zunächst für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dass $(x, y) \in N$ genau dann wenn $(x, -y) \in N$. Weiter beobachten wir für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$0 \leq y^2 = x^3 \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 0$$

Also muss für $(x, y) \in N$ insbesondere $x \geq 0$ gelten. Deshalb und aufgrund der genannten Symmetrie betrachten wir nur den ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$. Wir gehen nun vor wie in Teil (a). Sei also $t \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned}\lambda_t \colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}^2 \\ s &\mapsto (s, t \cdot s)\end{aligned}$$

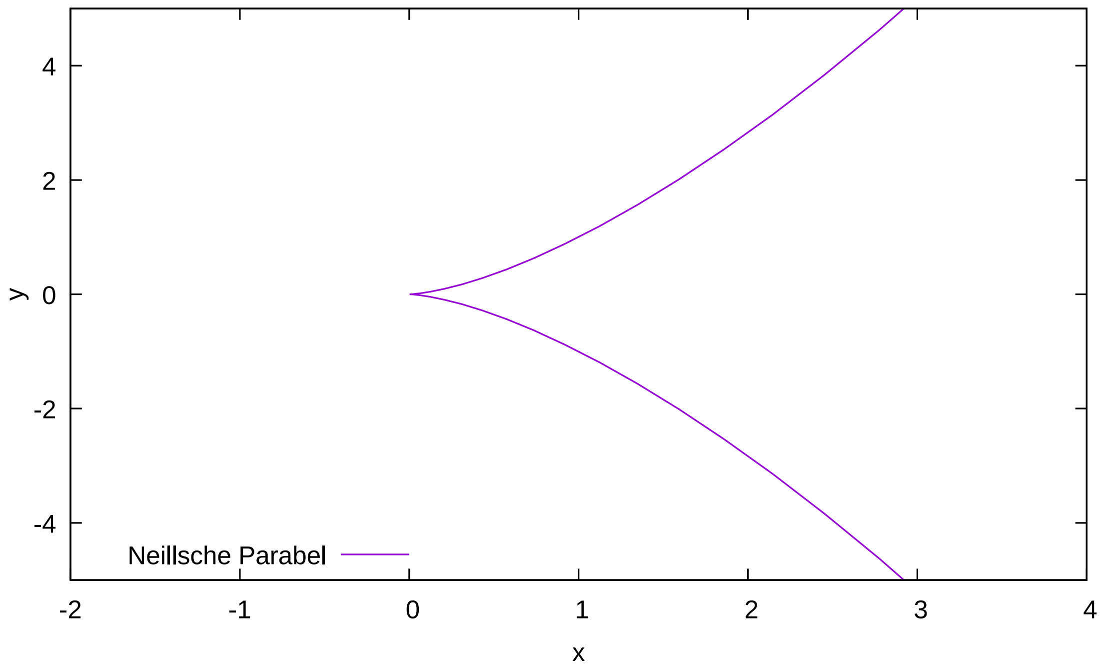

Abbildung 4: Skizze der Neillschen Parabel

Wir wollen für jedes t den Schnitt der Mengen $\mathrm{im}(\lambda_t)$ und N bestimmen. D.h. für gegebenes t suchen wir alle $s \in \mathbb{R}_+$ sodass $\lambda_t(s) \in N$. $\lambda_t(s) \in N$ gilt aber genau dann wenn $\lambda_t(s)$ Gleichung (2) erfüllt. Also genau dann wenn

$$(ts)^2 - s^3 = 0$$

Nun ist aber im Kontext $s \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} (ts)^2 - s^3 = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad s^3 = t^2 s^2 \\ &\Leftrightarrow \qquad s = t^2 \end{aligned}$$

Damit bekommen wir für jedes t den Schnittpunkt (t^2, t^3). Wir vermuten also, dass

$$\begin{aligned} \alpha_N \colon (-\infty, \infty) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(t^2, t^3\right) \end{aligned}$$

eine Parametrisierung von N ist. Offensichtlich ist α_N stetig differenzierbar. Um zu zeigen, dass α_N eine Parametrisierung von N ist müssen wir wieder zeigen, dass $\mathrm{im}(\alpha_N)$ gleich N ist. Die Inklusion $\mathrm{im}(\alpha_N) \subseteq N$ rechnet man wieder leicht nach, indem man $\alpha_N(t)$ in Gleichung (2) einsetzt: Sei also $t \in \mathbb{R}$ dann ist

$$\left(t^3\right)^2 - \left(t^2\right)^3 = t^6 - t^6 = 0$$

Für die umgekehrte Inklusion sei $(x, y) \in N$. Wir wollen zeigen, dass es $t \in \mathbb{R}$ gibt sodass

$$x = t^2 \qquad \wedge \qquad y = t^3$$

Ist $y \geq 0$ dann können wir $t = \sqrt{x}$ wählen (da $x \geq 0$) , denn

$$\sqrt{x}^2 = x$$

und da im momentanen Kontext $y \geq 0$ Gleichung (2) äquivalent zu $y = x\sqrt{x}$ folgt

$$\sqrt{x}^3 = \sqrt{x}\sqrt{x}^2 = \sqrt{x}x = y$$

Ist $y < 0$ dann können wir $t = -\sqrt{x}$ wählen (da $x \geq 0$), denn

$$\left(-\sqrt{x}\right)^2 = x$$

und da im momentanen Kontext $y < 0$ Gleichung (2) äquivalent zu $y = -x\sqrt{x}$ folgt

$$\left(-\sqrt{x}\right)^3 = -\sqrt{x}\left(-\sqrt{x}\right)^2 = -\sqrt{x}x = y$$

Also gilt auch $N \subseteq \operatorname{im}(\alpha_N)$ und somit $\operatorname{im}(\alpha_N) = N$. Damit ist dann α_N eine Parametrisierung von N.
Leiten wir α_N nun ab, so bekommen wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\alpha}_N(t) = (2t, 3t^2)$$

Weiter nimmt α_N den Wert $(0,0)$ genau an der Stelle 0 an. Es ist aber $\dot{\alpha}_N(0) = (0,0)$. Es mag zunächst erstaunlich erscheinen, dass man an diese abgeknickten Stelle überhaupt stetig differenzieren kann, wo wir doch wissen, dass Funktion mit „Knick“ wie die Betragsfunktion $|\cdot|$ am Knick nicht stetig differenzierbar sind. Die „Glattheit“ bezieht sich aber hier vielmehr auf das Durchlaufen der von α_N definierten Kurve, wobei $\dot{\alpha}_N$ die Geschwindigkeitsinformation enthält: man läuft zunächst im ersten Quadranten Richtung Knick und wird dabei stetig langsamer bis man im Knick zum Stillstand kommt, um dann wieder stetig Geschwindigkeit aufzunehmen und in den vierten Quadranten zu laufen.

Aufgabe 12 (Die Differentialgleichung für exponentielles Wachstum bzw. exponentiellen Zerfall).
(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es zu jeder Lösung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der *Differentialgleichung*

$$f' = \lambda f$$

genau ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) = c\exp(\lambda x)$. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto f(x)\exp(-\lambda x)$.)

(b) Zeigen Sie: Für $\lambda > 0$ gibt es für jede Lösung $f \neq 0$ genau ein $T > 0$, so dass $f(x+T) = 2f(x)$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ (so genannte *Verdoppelungszeit*). Für $\lambda < 0$ gibt es für jede Lösung $f \neq 0$ genau ein $T > 0$, so dass $f(x+T) = \frac{1}{2}f(x)$ ist, für alle $x \in \mathbb{R}$ (so genannte *Halbwertzeit*). Berechnen Sie $T(\lambda)$ in beiden Fällen.

Lösungsvorschlag.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$f' = \lambda f \tag{3}$$

Sei weiter

$$\begin{aligned}\tilde{f}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x)\exp(-\lambda x)\end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{f}$ differenzierbar mit

$$\tilde{f}'(x) = f'(x)\exp(-\lambda x) - \lambda\tilde{f}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $f' = \lambda f$ ist jetzt aber

$$\tilde{f}'(x) = \lambda f(x)\exp(-\lambda x) - \lambda\tilde{f}(x) = \lambda\tilde{f}(x) - \lambda\tilde{f}(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also muss $\tilde{f}$ eine konstante Abbildung sein wenn f die DGL (3) löst. D.h. wenn f die DGL (3) löst, gibt es $c \in \mathbb{R}$ sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$c = \tilde{f}(x) = f(x)\exp(-\lambda x)$$

Insbesondere muss

$$c = \tilde{f}(0) = f(0)\exp(-\lambda \cdot 0) = f(0)$$

gelten. c ist also eindeutig durch $f(0)$ bestimmt. Wenn also f die DGL (3) löst, gibt es mit $c := f(0)$ genau ein Element aus $\mathbb{R}$ sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = c\exp(\lambda x)$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und f eine Lösung der DGL (3) mit $f \neq 0$. Wegen Teil (a) muss dann $f(0) \neq 0$ gelten. Seien weiter $x, T, K \in \mathbb{R}$ und $K > 0$. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
f(x+T) = Kf(x) \quad &\Leftrightarrow \quad f(0)\exp(\lambda(x+T)) = Kf(0)\exp(\lambda x) && \text{(Teil (a))}\\
&\Leftrightarrow \quad \exp(\lambda T) = K && (f(0) \neq 0)\\
&\Leftrightarrow \quad \lambda T = \ln(K) && (\exp^{-1} = \ln)\\
&\Leftrightarrow \quad T = \frac{\ln(K)}{\lambda} && (\lambda \neq 0)
\end{aligned}$$

In diesem Kontext gilt also

$$f(x+T) = Kf(x)$$

genau dann wenn

$$T = \frac{\ln(K)}{\lambda}$$

Wir interessieren uns nun für die Fälle

(i) $\lambda > 0$ und $K = 2$
(ii) $\lambda < 0$ und $K = \frac{1}{2}$

In beiden Fällen gibt es nun wegen den obigen Äquivalenzen zu jedem erlaubten λ genau ein T - nämlich $\frac{\ln(K)}{\lambda}$ - sodass

$$f(x+T) = Kf(x)$$

Da außerdem $\ln(2) > 0$ bzw. $\ln(1/2) < 0$ ist in beiden Fällen $T > 0$.