Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
18.05.2020
Blatt 05

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 17. (a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n. (Das Nullpolynom habe Grad $-\infty$.) Sei weiter $\lim_{x\to 0} p(x)/x^n = 0$. Zeigen Sie, dass $p = 0$ sein muss.

(b) Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Zeigen Sie: Ist $p \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n mit

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

so muss p das Taylorpolynom von f in a der Ordnung n sein, $p = P^f_{a,n}$.

Lösungsvorschlag. (a) Beachte zunächst: Ist $0 \le k < n$, so folgt aus $\lim_{x\to 0} p(x)/x^n = 0$, dass auch

$$\frac{p(x)}{x^k} = \frac{p(x)}{x^n} \cdot \frac{x^n}{x^k} = \frac{p(x)}{x^n} \cdot x^{n-k} \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0.$$

Sei nun $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad kleiner oder gleich n und $p \neq 0$. Sei $k = \min\{0 \le l \le n : a_l \neq 0\}$, also

$$p(x) = a_k x^k + \cdots + a_n x^n, \text{ mit } a_k \neq 0.$$

Dann folgt aber

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^k} = \lim_{x\to 0}(a_k + a_{k+1}x + \cdots + a_n x^{n-k}) = a_k,$$

Widerspruch. Also muss $p = 0$ sein.

(b) O.E. sei $a = 0$. (Mache sonst die Variablentransformation $y = x - a$.). Da $P := P^f_{a,n}$ die Bedingung erfüllt (siehe Korollar aus dem Satz von Taylor), gilt für jedes $p \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad kleiner oder gleich n mit dieser Approximationseigenschaft:

$$\frac{p(x) - P(x)}{x^n} = \frac{p(x) - f(x)}{x^n} + \frac{f(x) - P(x)}{x^n} \longrightarrow 0 + 0 = 0.$$

Nach Teil (a) ist dann $p - P = 0$, also $p = P$.

Aufgabe 18. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, dass $f'(0) = 0$ ist, f aber weder lokales Extremum noch Sattelpunkt in 0 hat.

(b) Zeigen Sie, dass f' nicht stetig ist.

Lösungsvorschlag. (a) f ist außerhalb von Null differenzierbar, weil es dort Zusammensetzung durch die üblichen Operationen von differenzierbaren Funktionen ist, die Differenzierbarkeit erhalten, und für $a = 0$ berechnen wir

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = h\cos(\frac{1}{h}) \longrightarrow 0,$$

für $h \to 0$, da cos betragsweise durch 1 beschränkt ist. Also ist f auch in $a = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Ist nun $\delta > 0$ beliebig klein, so wähle man ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1/(2\pi\delta)$, also

$$\frac{1}{2\pi k} < \delta.$$

Dann ist $x \mapsto \cos(1/x)$ auf dem Intervall $(0, \delta)$ sowohl positiv als auch negativ, weil dann für $x \in \mathbb{R}$ mit

$$0 < \frac{1}{2\pi(k+1)} \leq x \leq \frac{1}{2\pi k} < \delta$$

genau wenn

$$2\pi k \leq \frac{1}{x} \leq 2\pi(k+1)$$

ist und $y \mapsto \cos(y)$ im Intervall $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$ alle Werte im Intervall $[-1, 1]$ annimmt. f hat deshalb in $a = 0$ weder ein lokales Extremum noch eine Sattelstelle.

(b) Für $x \neq 0$ ist

$$f'(x) = 2x \cdot \cos\frac{1}{x} + x^2 \cdot (-\sin\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}.$$

Für $x_n > 0$ mit $1/x_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$, also

$$x_n := \frac{2}{4\pi n + \pi},\ n \in \mathbb{N},$$

ist

$$\cos\frac{1}{x_n} = 0 \quad \text{und} \quad \sin\frac{1}{x_n} = 1,$$

also $f'(x_n) = 1$. Es ist also (x_n) eine Nullfolge mit

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 1 \neq 0 = f'(0),$$

also ist f' nicht stetig in 0.

Aufgabe 19 (Vorzeichenwechsel) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$. Wir sagen, dass eine stetige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ *in a einen Vorzeichenwechsel hat*, wenn gilt: Es existiert ein $\delta > 0$, so dass für f einer der beiden folgenden Fälle eintritt: (i) Für $x \in I$ mit $a - \delta < x < a$

ist $f(x) < 0$ und für $x \in I$ mit $a < x < a + \delta$ ist $f(x) > 0$, oder (ii) für $x \in I$ mit $a - \delta < x < a$ ist $f(x) > 0$ und für $x \in I$ mit $a < x < a + \delta$ ist $f(x) < 0$.

(a) Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}^1(I)$ mit $f(a) = 0$ und $f'(a) \neq 0$, so hat f in a einen Vorzeichenwechsel.

(b) (Wendepunkt) Ist $f \in \mathcal{C}^2(I)$, so nennen wir $a \in I$ einen *Wendepunkt* (eigentlich besser *Wendestelle*) *von* f, wenn f'' in a einen Vorzeichenwechsel hat. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{C}^3(I)$ mit $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$, so ist a ein Wendepunkt von f.

Lösungsvorschlag. (a) Sei $f'(a) > 0$. Da f' stetig in a ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|f'(x) - f'(a)| < \frac{f'(a)}{2}$$

ist, für alle $x \in I$ mit $|x - a| < \delta$. Insbesondere ist dann dort

$$f'(x) = (f'(x) - f'(a)) + f'(a) > -\frac{f'(a)}{2} + f'(a) = \frac{f'(a)}{2} > 0.$$

Es folgt für alle $x \in I$ mit $a - \delta < x < a$:

$$-f(x) = f(a) - f(x) = f'(\xi) \cdot (a - x) > 0,$$

mit einer Zwischenstelle $\xi \in (x, a)$ nach dem Mittelwertsatz, weil beide Faktoren größer als Null sind. Es ist also dort $f(x) < 0$. Für $x \in I$ mit $a < x < a + \delta$ ist ebenso mit einer Zwischenstelle $\xi \in (a, x)$ nach dem Mittelwertsatz

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(\xi) \cdot (x - a) > 0,$$

weil wieder beide Faktoren größer als Null sind und damit dort $f(x) > 0$. Der Fall $f'(a) < 0$ führt analog auf die Alternative $f(x) > 0$ für $x \in (a - \delta, a) \cap I$ und $f(x) < 0$ für $x \in (a, a + \delta) \cap I$. f hat also einen Vorzeichenwechsel in a.

(b) Wir wenden Teil (a) auf $f'' \in \mathcal{C}^1(I)$ an. Es folgt: a ist eine Wendestelle von f.

Aufgabe 20 (Rationale Funktionen). Sei $\mathbb{R}[X]$ der *Polynomring* aller Polynome mit reellen Koeffizienten und $\sim$ folgende Relation auf $\mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\})$: $(f, g) \sim (p, q) :\Leftrightarrow fq = gp$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. (Wir nennen eine Äquivalenzklasse $[(p, q)] =: \frac{p}{q}$ eine *rationale Funktion (mit reellen Koeffizienten)*.)

(b) Definieren Sie (nach dem Vorbild von $\mathbb{Q}$) Addition und Multiplikation auf dem *Quotientenkörper* $\mathbb{R}(X) := (\mathbb{R}[X] \times (\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}))/\sim$ und zeigen Sie, dass $\mathbb{R}(X)$ damit tatsächlich ein Körper wird.

(c) Wir definieren nun zu jedem $r \in \mathbb{R}(X)$ eine Funktion $f_r \colon I \to \mathbb{R}$ wie folgt: Wähle einen Repräsentanten (p, q) von r, so dass p und q *teilerfremd* sind, setze dann $I = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ und schließlich $f(x) := p(x)/q(x)$. Zeigen Sie, dass das wohldefiniert und die Zuordnung $r \mapsto f_r$ injektiv ist. (Hinweis: Hat ein Polynom unendlich-viele Nullstellen, so ist es bereits das Nullpoynom.)

Lösungsvorschlag. (a) und (b) Die Konstruktion von $\mathbb{R}(X)$ aus $\mathbb{R}[X]$ ist völlig analog zu der, wie man $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{Z}$ konstruiert (siehe die Aufgaben 04 und 14 auf den Blättern 01 und 04 von Analysis I). Sie funktioniert für jeden *Integritätsring* und $\mathbb{R}[X]$ ist wie $\mathbb{Z}$ ein solcher. Die Nullteilerfreiheit folgt dabei aus der *Gradformel*

$$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q),$$

für alle $p, q \in \mathbb{R}[X]$ (wenn wir $\deg(0) := -\infty$ und $-\infty + n = n + (-\infty) = -\infty$ für alle $n \in \{-\infty\} \cup \mathbb{N}_0$ vereinbaren). Der Beweis von (a) und (b) verläuft also genau so wie bei den Aufgaben 04 und 14 in Analysis I.

(c) (i) Zur Existenz: Startet man mit einem beliebigen Repräsentanten $(\tilde{p}, \tilde{q})$ für $r \in \mathbb{R}(X)$, der evtl. nicht teilerfremd ist, so kürzt man einen gemeinsamen Teiler, der ja mindestens Grad 1 hat, weil die nicht-trivialen konstanten Polynome vom Grad 0 die *Einheiten* in $\mathbb{R}[X]$ sind. (Das sind die Elemente, die Inverse haben, so wie ± 1 in $\mathbb{Z}$. Diese werden nicht als (echte) Teiler betrachtet, weil sie alle Elemente teilen.) Dabei geht dann der Grad des Zählers und des Nenners wegen der Gradformel um mindestens 1 herunter. Nach endlich vielen Schritten erhält man so ein teilerfremdes Paar (p, q) für r, ganz ähnlich wie bei rationalen Zahlen.
(ii) Zur Wohldefiniertheit: Hat man einen teilerfremden Repräsentanten (p, q) für r, so können p und q insbesondere keine gemeinsame Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ haben, weil sie sonst beide den Teiler $(X - a)$ hätten. Hat man nun zwei teilerfremde Repräsentanten (p_1, q_1) und (p_2, q_2) von r, so folgt aus der Gleichung $p_1 q_2 = q_1 p_2$, dass jede Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ von q_1 auch eine Nullstelle von q_2 sein muss, weil eben $p_1(a) \neq 0$ ist:

$$p_1(a) q_2(a) = q_1(a) p_2(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_2(a) = 0.$$

Aus Symmetriegründen (denn q_1 ist in keiner Weise gegenüber q_2 ausgezeichnet) müssen aber die Nullstellen von q_2 auch in denen von q_1 enthalten sein. q_1 und q_2 haben also die gleichen Nullstellen und daher ist

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ q_1(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ q_2(x) \neq 0\} = I_2.$$

Innerhalb von $I := I_1 = I_2$ folgt aber nach Einsetzen von x durch Teilen von $q_1(x)$ und $q_2(x)$ aus $p_1 q_2 = q_1 p_2$:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} = \frac{p_2(x)}{q_2(x)},$$

für alle $x \in I$, und damit ist $f_r \colon I \to \mathbb{R}$ wohldefiniert.
(iii) Zur Injektivität von $r \mapsto f_r$: Beachte, dass das Komplement von $I = I_r$, auf dem f_r definiert ist, nur eine endliche Menge ist, da für einen (teilerfremden) Repräsentanten (p, q) von f $(q \neq 0)$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$ immer endlich ist. Sind nun $r_1 = p_1/q_1$ und $r_2 = p_2/q_2$ mit $f_{r_1} = f_{r_2}$ (und (p_1, q_1) und (p_2, q_2) teilerfremd), so ist insbesondere

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ q_1(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \ q_2(x) \neq 0\} = I_2$$

und auf $I := I_1 = I_2$ gilt:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} = f_{r_1}(x) = f_{r_2}(x) = \frac{p_2(x)}{q_2(x)}.$$

Für alle $x \in I$, welches ∞-viele Elemente besitzt, ist deshalb

$$(p_1 q_2 - q_1 p_2)(x) = p_1(x) q_2(x) - q_1(x) p_2(x) = 0.$$

Daher muss $p_1q_2 - q_1p_2$ das Nullpolynom sein, also $p_1q_2 = q_1p_2$, d.h.: $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$ und damit $r_1 = r_2$.

[Anmerkung (ohne Bedeutung für den weiteren Verlauf von Analysis II): Die Teilbarkeitstheorie im Integritätsring $\mathbb{R}[X]$ verläuft in mancher Hinsicht ähnlich der in $\mathbb{Z}$. Die Analoga der *Primzahlen* (und ihrer Negativen) in $\mathbb{Z}$ sind die *irreduziblen Polynome* in $\mathbb{R}[X]$. Das sind die Nichteinheiten in $\mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, die man nicht mehr (nicht-trivial) zerlegen kann. Z.B. sind lineare Polynome $(X - a)$ $(a \in \mathbb{R})$ irreduzibel oder quadratische Polynome $X^2 + aX + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ohne (reelle) Nullstelle (d.i.: $a^2 - 4b < 0$). Jedes Polynom kann man (bis auf Einheiten und Reihenfolge) *eindeutig in irreduzible Faktoren zerlegen*. Allerdings sind die irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$ viel überschaubarer als die Primzahlen in $\mathbb{Z}$: Es gibt nur die linearen Polynome und die quadratischen Polynome (mit negativer *Diskriminante*). Alle Polynome von höherem Grad kann man zerlegen. Das ist eine Version des **Fundamentalsatzes der Algebra**. Er wird in der so genannten *Funktionentheorie* (Analysis 4) bewiesen.]