Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
15.06.2020
Blatt 08

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 29 (a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und $\| \cdot \| \colon V \to [0, \infty)$ die induzierte Norm. Zeigen Sie, dass dann für $\| \cdot \|$ die so genannte *Parallelogrammgleichung* gilt: Für alle $v, w \in V$ ist:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(b) Zeigen Sie, dass die *Maximumsnorm* $\| \cdot \|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ auf $\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1}^{n}(|x_i|),$$

für $n \geq 2$ nicht von einem Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ kommt.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir rechnen einfach nach: Seien $v, w \in V$. Dann gilt mit der Bilinearität (B) des Skalarprodukts

$$\begin{aligned}
\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 &= \sqrt{\langle v + w, v + w \rangle}^2 + \sqrt{\langle v - w, v - w \rangle}^2 \\
&= \langle v + w, v + w \rangle + \langle v - w, v - w \rangle \\
&= \langle v, v + w \rangle + \langle w, v + w \rangle + \langle v, v - w \rangle - \langle w, v - w \rangle && \text{(B)} \\
&= \langle v, v + w + v - w \rangle + \langle w, v + w - v + w \rangle && \text{(B)} \\
&= \langle v, 2v \rangle + \langle w, 2w \rangle \\
&= 2 \langle v, v \rangle + 2 \langle w, w \rangle && \text{(B)} \\
&= 2\sqrt{\langle v, v \rangle}^2 + 2\sqrt{\langle w, w \rangle}^2 \\
&= 2 \|v\|^2 + 2 \|w\|^2 \\
&= 2 \left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)
\end{aligned}$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Angenommen die Maximumsnorm $\| \cdot \|_\infty$ wäre von einem Skalarprodukt induziert. Dann müsste nach (a) die Parallelogrammgleichung gelten. Für

$$v := (1, 0, \ldots, 0)$$
$$w := (0, \ldots, 0, 1)$$

wobei $0, \dots, 0$ für eine Liste von $n-1$ Nullen steht (also mindestens eine Null in unserem Kontext), gilt aber

$$\|v+w\|_\infty^2 + \|v-w\|_\infty^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \neq 4 = 2 \cdot \left(1^2 + 1^2\right) = 2\left(\|v\|_\infty^2 + \|w\|_\infty^2\right)$$

Damit kann die Parallelogrammgleichung aber nicht erfüllt sein und $\|\cdot\|_\infty$ kann nicht von einem Skalarprodukt induziert sein.

In einem euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt ein Tupel $(e_i)_{i\in I}$ von Vektoren in V *orthonormal*, wenn für alle $i, j \in I$ gilt: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Hier bezeichnet δ_{ij} das *Kroneckersymbol*, d.h.: $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$, und $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$.

Aufgabe 30. Wir betrachten den *Folgenraum* $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ mit seiner natürlichen Vektorraumstruktur $(x_n) + (y_n) := (x_n + y_n)$ und $\lambda \cdot (x_n) := (\lambda x_n)$, für $(x_n), (y_n) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$l^2 := \{(x_n) \in V : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\dim l^2 = \infty$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle (x_n), (y_n)\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

ein Skalarprodukt auf l^2 gegeben ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Folgen $e_n = (\delta_{mn})_{m\in\mathbb{N}}$ $(n \in \mathbb{N})$ orthonormal in l^2 sind.

Lösungsvorschlag.

(a) Da die Nullfolge 0_{l^2} offenbar in l^2 liegt, reicht es zu zeigen, dass l^2 abgeschlossen ist bezüglich der gegebenen Vektorraumstruktur auf V. Seien dazu $x, y \in l^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es sind also x, y quadratsummierbare reelle Folgen und wie üblich schreiben wir $x_n := x(n)$ und $y_n := y(n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wir wollen nun zeigen, dass $\lambda \cdot x$ und $x + y$ auch quadratsummierbar sind. Für $\lambda \cdot x$ ist das klar, denn

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 x_n^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$$

Für $x + y$ beachte zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x_n + y_n)^2 = x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2 \\ 0 &\leq (x_n - y_n)^2 = x_n^2 - 2x_n y_n + y_n^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} -2x_n y_n &\leq x_n^2 + y_n^2 \\ 2x_n y_n &\leq x_n^2 + y_n^2 \end{aligned}$$

Das bedeutet aber

$$|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}y_n^2$$

Mit dem Majorantenkriterium konvergiert also die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

absolut. Folglich gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$$

(b) Beachte zunächst, dass es in einem Vektorraum mit endlicher Dimension $k \in \mathbb{N}$ maximal k linear unabhängige Vektoren geben kann. Können wir also zu jedem $k \in \mathbb{N}$ auch k linear unabhängige Vektoren in l^2 angeben, so muss $\dim l^2 = \infty$ sein. Betrachte dazu die Folgen e_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ wie in (d), also

$$\begin{aligned} e_n \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ m &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist die Menge $\{e_1, \ldots, e_k\}$ linear unabhängig, denn seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$a := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0_{l^2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_n = a(n) = 0_{l^2}(n) = 0_{\mathbb{R}} \qquad \text{für alle } n \in \{1, \ldots, k\}$$

da zwei Folgen x, y genau dann gleich sind, wenn $x(n) = y(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Seien nun $x, y, z \in l^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wie wir bereits in (a) gesehen haben gilt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \in \mathbb{R}$$

Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon l^2 \times l^2 \to \mathbb{R}$ ist also wohldefiniert. Wir prüfen die Eigenschaften eines Skalarprodukts nach:

(i) Für die Bilinearität gilt mit der Konvergenz aller beteiligten Reihen

$$\begin{aligned} \langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} ((\lambda x_n + \mu y_n) z_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n z_n + \mu y_n z_n) \\ &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n \\ &= \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle \end{aligned}$$

Die Linearität im zweiten Argument folgt aus der Symmetrie[1]

$$\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z\rangle = \langle \lambda \cdot y + \mu \cdot z, x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle + \mu\langle z, x\rangle = \lambda\langle x, y\rangle + \mu\langle x, z\rangle$$

(ii) Die Symmetrie ist klar aus der Definition

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = \langle y, x\rangle$$

(iii) Für die positive Definitheit beachte zunächst, dass wegen $x_n^2 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch folgt, dass

$$\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geq 0$$

Ist $x = 0$ so folgt aus der Bilinearität $\langle x, x\rangle = 0$, denn allgemeiner gilt[2]

$$\langle 0_{l^2}, y\rangle = \langle 0_{\mathbb{R}} \cdot 0_{l^2} + 0_{\mathbb{R}} \cdot 0_{l^2}, y\rangle = 0_{\mathbb{R}}\langle 0_{l^2}, y\rangle + 0_{\mathbb{R}}\langle 0_{l^2}, y\rangle = 0_{\mathbb{R}}$$

Ist umgekehrt $x \neq 0$, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k^2 > 0$, also

$$\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geq x_k^2 > 0$$

(d) Es gilt einerseits für $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\langle e_k, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e_k(n) e_k(n) = e_k(k)^2 = 1$$

Andererseits ist für $k \neq m \in \mathbb{N}$,

$$\langle e_k, e_m\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e_k(n) e_m(n) = e_k(k) e_m(k) + e_k(m) e_m(m) = 0 + 0 = 0$$

Aufgabe 31. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 2π-periodischen, stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf V gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Vektoren c_0, c_n, s_n (für $n \in \mathbb{N}$) mit

$$c_0(x) = 1, \quad c_n(x) = \sqrt{2}\cos(nx), \quad s_n(x) = \sqrt{2}\sin(nx) \quad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

ein Orthonormalsystem von V bilden.

[1] Das gilt immer für reelle Skalarprodukte.

[2] Auch das gilt immer für Skalarprodukte.

(c) Sei $f \in V$. Zeigen Sie: Wenn es überhaupt eine Reihe von der Form

$$a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n$$

gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert, so müssen die Koeffizienten a_0, a_n, b_n (für $n \in \mathbb{N}$) die folgenden so genannten *Fourier-Koeffizienten von f* sein:

$$a_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n := \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n := \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

(Die Reihe mit diesen Koeffizienten wird die *Fourier-Reihe von f* genannt.)

Lösungsvorschlag.

(a) Seien $f, g, h \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Wir bemerken zunächst, dass aus der Stetigkeit von f, g auf $[0, 2\pi]$ auch die Stetigkeit von $f \cdot g$ auf $[0, 2\pi]$ folgt. Es ist also $f \cdot g$ integrierbar und folglich ist das Skalarprodukt wohldefiniert. Wir müssen die Skalarprodukt-Eigenschaften nachweisen:

(i) Die Bilinearität folgt sofort aus der Linearität des Integrals

$$\begin{aligned}
\langle \lambda \cdot f + \mu \cdot g, h \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda f(x) + \mu g(x))h(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\lambda f(x)h(x) + \mu g(x)h(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)h(x)\mathrm{d}x + \mu \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)h(x)\mathrm{d}x \\
&= \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle
\end{aligned}$$

und im zweiten Argument analog, bzw. aus der Symmetrie (wie in Aufgabe 30).

(ii) Die Symmetrie ist klar aus der Definition

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)f(x)\mathrm{d}x = \langle g, f \rangle$$

(iii) Für die positive Definitheit beachte zunächst, dass wegen $f(x)^2 \geq 0$ für alle $x \in [0, 2\pi]$ auch folgt, dass

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x \geq 0$$

Ist $f = 0$ folgt wieder aus der Bilinearität (s. Aufgabe 30), dass $\langle f, f \rangle = 0$. Ist umgekehrt

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 \mathrm{d}x = 0$$

so haben wir letztes Semester gezeigt (s. Augabe 42 aus Ana 1), dass dann $f(x)^2 = 0$ für alle $x \in [0, 2\pi]$, also auch $f = 0$.

(b) Wir berechnen die entsprechenden Integrale.

(i) Es gilt

$$\langle c_0, c_0\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Weiter ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\langle c_0, c_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{2\pi} = 0$$

und

$$\langle c_0, s_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin(nx)\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Aufgrund der Symmetrie des Skalarprodukts ist dann aber auch

$$\langle c_n, c_0\rangle = \langle s_n, c_0\rangle = 0$$

(ii) Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
\langle c_m, c_n\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(mx)\cos(nx)}{m}\right]_0^{2\pi} + \frac{n}{m}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(mx)\cos(nx)}{m}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{n\cos(mx)\sin(nx)}{m^2}\right]_0^{2\pi} + \frac{n^2}{m^2}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^2}{m^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^2}{m^2}\langle c_m, c_n\rangle
\end{aligned}$$

Für $m \neq n$ ist diese Gleichung nur erfüllt wenn $\langle c_m, c_n\rangle = 0$. Weiter folgt aus der zweiten Zeile, dass

$$\langle c_m, c_n\rangle = \frac{n}{m}\langle s_m, s_n\rangle$$

Für $m \neq n$ ist also auch $\langle s_m, s_n\rangle = 0$. Für $m = n$ hingegen gilt

$$\begin{aligned}
\langle c_m, c_m\rangle = \langle s_m, s_m\rangle &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(mx)^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\pi}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(mx)\cos(mx)\mathrm{d}x \\
&= 2 - \langle c_m, c_m\rangle
\end{aligned}$$

Also ist $\langle s_m, s_m\rangle = \langle c_m, c_m\rangle = 1$.

(iii) Mit partieller Integration gilt für $n, m \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
\langle c_m, s_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\cos(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(mx)\sin(nx)}{m}\right]_0^{2\pi} - \frac{n}{m}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(mx)\sin(nx)}{m}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{n\cos(mx)\cos(nx)}{m^2}\right]_0^{2\pi} + \frac{n^2}{m^2}\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^2}{m^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(mx)\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{n^2}{m^2}\langle c_m, s_n \rangle
\end{aligned}$$

Für $m \neq n$ ist die Gleichung wieder nur erfüllt wenn $\langle c_m, s_n \rangle = 0$ und aus der Symmetrie folgt auch $\langle s_n, c_m \rangle = 0$. Weiter folgt aus der zweiten Zeile, dass

$$\langle c_m, s_n \rangle = -\frac{n}{m}\langle s_m, c_n \rangle$$

Für $m = n$ folgt daraus mit der Symmetrie, dass

$$\langle c_m, s_m \rangle = -\langle s_m, c_m \rangle = -\langle c_m, s_m \rangle$$

Alos ist auch $\langle c_m, s_m \rangle = \langle s_m, c_m \rangle = 0$.

(c) Sei $f \in V$ und $\mathsf{e} \in \{c_0, c_1, \ldots, s_1, s_2, \ldots\}$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Seien weiter $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}
\xi \colon \mathbb{N} &\to V \\
m &\mapsto a_0 c_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k c_k + \sum_{k=1}^{m} b_k s_k
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass ξ gleichmäßig gegen f konvergiert. Außerdem wissen wir, dass e beschränkt ist. Damit folgt: Es gibt $M \in \mathbb{R}$ sodass für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit der Eigenschaft dass für alle natürlichen $n \geq N$ und $x \in \mathbb{R}$

$$|\mathsf{e}(x)f(x) - \mathsf{e}(x)\xi_n(x)| = |\mathsf{e}(x)|\,|f(x) - \xi_n(x)| \leq M \cdot \varepsilon$$

Dies zeigt dass,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &\to ([0, 2\pi] \to \mathbb{R}) \\
m &\mapsto (x \mapsto \mathsf{e}(x)\xi_m(x))
\end{aligned}$$

gleichmäßig gegen $\mathsf{e} \cdot f$ (wobei $\cdot$ die von $\mathbb{R}$ induzierte Multiplikation bezeichnet) konvergiert. Mit Satz 14.7 im Skript folgt dann

$$
\begin{aligned}
\langle \mathsf{e}, f\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{e}(x)f(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{e}(x)\xi_m(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(a_0\mathsf{e}(x)c_0(x) + \sum_{k=1}^m a_k\mathsf{e}(x)c_k(x) + \sum_{k=1}^m b_k\mathsf{e}(x)s_k(x)\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{e}(x)c_0(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{e}(x)c_k(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^m \frac{b_k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{e}(x)s_k(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \lim_{m\to\infty}\left(a_0\langle \mathsf{e}, c_0\rangle + \sum_{k=1}^m a_k\langle \mathsf{e}, c_k\rangle + \sum_{k=1}^m b_k\langle \mathsf{e}, s_k\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt jetzt leicht aus der in (b) gezeigten Orthonormalität.

Aufgabe 32 (Pfingstaufgabe). Sei X eine Menge und $\mathcal{B}(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X sowie $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm auf $\mathcal{B}(X)$ (vgl. Aufgabe 28). Zeigen Sie, dass $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

Lösungsvorschlag. Um zu zeigen, dass $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist, müssen wir zeigen, dass jede Cauchyfolge in $\mathcal{B}(X)$ auch konvergiert, wobei „Cauchyfolge“ u. „Konvergenz“ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|$ zu verstehen sind.
Die Vorgehensweise ist folgende: zu jeder Cauchyfolge konstruieren wir eine (beschränkte) Funktion auf X und zeigen anschließend, dass die Cauchyfolge gegen diese auch wirklich beschränkte Funktion konvergiert.
Sei also

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{B}(X)$$

eine Cauchyfolge und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.
Man erinnere sich an die Konvention $f_n := f(n)$ für jedes natürliche n.
Dass f eine Cauchyfolge sein soll, bedeutet dann insbesondere, dass es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle natürlichen $m_1, m_2 \geq N_\varepsilon$ mit $m_2 > m_1$

$$\|f_{m_2} - f_{m_1}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei also N_ε eine natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft. Sei weiter $y \in X$. Dann ist, aufgrund der Supremumseigenschaft von $\|\cdot\|$, für alle natürlichen $m_2, m_1 \geq N_\varepsilon$ mit $m_2 > m_1$

$$|f_{m_2}(y) - f_{m_1}(y)| = |(f_{m_2} - f_{m_1})(y)| \leq \|f_{m_2} - f_{m_1}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dies zeigt, dass

$$
\begin{aligned}
s_y\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\
n &\mapsto f_n(y)
\end{aligned}
$$

eine reelle Cauchyfolge definiert. Mit der Vollständigkeit der reellen Zahlen konvergiert s_y (eigentlich).

$$\begin{aligned}\omega\colon X &\to \mathbb{R}\\ y &\mapsto \lim_{n\to\infty}(s_y)\end{aligned}$$

ist also wohldefiniert weil alle Grenzwerte in $\mathbb{R}$ existieren und eindeutig sind.
Um zu zeigen, dass die Folge f gegen ω konvergiert, können wir dieselbe Abschätzung wie in Aufgabe 25 benutzen. Während wir dort aber aus dieser Abschätzung sofort gleichmäßige Konvergenz und somit auch Stetigkeit von ω schließen konnten, schließen wir hier zunächst Beschränktheit von ω und durch Supremumsbildung dann Konvergenz von f gegen ω bezüglich der Supremumsnorm.
Wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion $|\cdot|$ (C) gilt also für alle natürlichen $n \geq N_\varepsilon$ und $x \in X$

$$\begin{aligned}|f_n(x) - \omega(x)| &= \left|f_n(x) - \lim_{m\to\infty}(s_x)\right|\\ &= \left|\lim_{m\to\infty}(f_n(x) - f_m(x))\right|\\ &= \lim_{m\to\infty}|(f_n(x) - f_m(x))| && \text{(C)}\\ &\leq \lim_{m\to\infty}\frac{\varepsilon}{2} && \text{(Ana1)}\\ &= \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung, folgt daraus für alle $x \in X$

$$||f_{N_\varepsilon}(x)| - |\omega(x)|| \leq |f_{N_\varepsilon}(x) - \omega(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Weil f eine Folge beschränkter Funktionen ist, folgt daraus aber für alle $x \in X$

$$|\omega(x)| \leq |f_{N_\varepsilon}(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \|f_{N_\varepsilon}\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Dies zeigt, dass ω beschränkt ist - also $\omega \in \mathcal{B}(X)$.
Nun ist $\mathcal{B}(X)$ ja ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Deshalb ist für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $(f_n - \omega) \in \mathcal{B}(X)$. Per Definition der Supremumsnorm ist $\|f_n - \omega\|$ die kleinste reelle Zahl[3], sodass für alle $x \in X$

$$|f_n(x) - \omega(x)| \leq \|f_n - \omega\|$$

Zumindest für alle natürlichen $n \geq N_\varepsilon$, wissen wir aber auch, dass für alle $x \in X$

$$|f_n(x) - \omega(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Wegen besagter Minimalität von $\|f_n - \omega\|$, folgt deshalb dann für alle natürlichen $n \geq N_\varepsilon$

$$\|f_n - \omega\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Dies ist aber gerade die Konvergenz von f gegen ω in $\mathcal{B}(X)$.

[3] vgl. Definition von Supremum