Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
26.07.2020
Blatt 14

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 53. Wir betrachten noch einmal das cartesische Blatt $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ mit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2 - x^2(x + 1)$ (vgl. Aufgabe 11). Bestimmen Sie alle Punkte $(x_0, y_0) \in C$, um die man $F(x, y) = 0$ lokal nach y auflösen kann und jene, wo man lokal nach x auflösen kann. Um welchen Punkt $(x_0, y_0) \in C$ kann man lokal weder nach x noch nach y auflösen? Begründe.

Lösungsvorschlag. Wir verwenden den Satz über implizite Funktionen und berechnen dazu erstmal die Jacobi-Matrix: Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist allgemein

$$J_F(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen kann $F(x, y) = 0$ um alle Punkte (x_0, y_0) lokal nach y aufgelöst werden für die $2y_0 \neq 0$, also $y_0 \neq 0$ ist. Die einzigen Punkte (x_0, y_0) auf dem cartesischen Blatt mit $y_0 = 0$ sind gegeben durch $(0, 0)$ und $(-1, 0)$, um alle anderen Punkte existiert somit eine Auflösung. Gäbe es eine lokale Auflösung $g\colon U \to V$ nach y um $(-1, 0)$, so wäre wegen der Symmetrie des cartesischen Blattes auch $-g\colon U \to V$ eine weitere lokale Auflösung. Da lokale Auflösungen jedoch eindeutig sind, muss $g = -g$, also g konstant Null sein. Somit kann g keine lokale Auflösung um $(-1, 0)$ sein, ein Widerspruch. Es kann also um $(-1, 0)$ keine lokale Auflösung nach y existieren und komplett analog sehen wir, dass dies auch auf $(0, 0)$ zutrifft.

Zur lokalen Auflösbarkeit nach x: Eine lokale Auflösung um (x_0, y_0) nach x ist möglich, wenn $-3x_0^2 - 2x_0 \neq 0$ ist, d. h. wenn $x_0 \neq 0$ und $x_0 \neq -\frac{2}{3}$. Die einzigen Punkte (x_0, y_0) auf C mit $-3x_0^2 - 2x_0 = 0$ sind gegeben durch $(0, 0)$, $(-\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{4}{27}})$, $(-\frac{2}{3}, -\sqrt{\frac{4}{27}})$. Wir müssen nun noch überprüfen, dass in diesen Punkten eine Auflösung nach x nicht möglich ist. Wir betrachten dazu beispielhaft den Punkt $(-\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{4}{27}})$: Um diesen herum existiert auf $U = B_{\frac{1}{3}}(-\frac{2}{3})$ eine lokale Auflösung nach y (!) gegeben durch

$$g\colon U \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x^2(x + 1)}.$$

Mit Standardargumenten überprüft man, dass g in $-\frac{2}{3}$ ein globales Maximum auf U annimmt. Insbesondere schließen wir daraus, dass $C \cap U \times g(U)$ keinen Punkt mit einer y-Komponente größer als $\sqrt{\frac{4}{27}}$ enthält. Somit kann um $(-\frac{2}{3}, \sqrt{\frac{4}{27}})$ keine lokale Auflösung nach x existieren. Für die verbleibenden zu überprüfenden Punkte kann ähnlich vorgegangen werden.

Der einzige Punkt auf dem cartesischen Blatt, der somit keine lokale Auflösung nach x oder y erlaubt, ist $(0,0)$.

Aufgabe 54. Wir betrachten das folgende (nicht-lineare) Gleichungssystem (GLS) in $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 - y_2^2 &= \sin(y_1 y_2) - \cos(x_2 y_1) \\ x_2 - y_1 &= \exp(x_1 x_2). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass man dieses GLS lokal um $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (1, 0, -1, 0)$ nach (y_1, y_2) auflösen kann. Ist $x \mapsto (x, f(x))$ für x nahe bei $(1,0)$ die Lösung des Systems, so bestimme man $Df(1,0)$.

Lösungsvorschlag. Wir können das Gleichungssystem auch als

$$F(x,y) = 0$$

schreiben, wobei die Funktion $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 y_1 - y_2^2 - \sin(y_1 y_2) + \cos(x_2 y_1) \\ x_2 - y_1 - \exp(x_1 x_2) \end{pmatrix}.$$

Nachdem wir die Lösungsmenge als Nullstellengebilde einer offenbar glatten Funktion geschrieben haben und beobachten, dass $F(1,0,-1,0) = 0$ ist, können wir versuchen den Satz über implizite Funktion anzuwenden. Um eine lokale Auflösung nach (y_1, y_2) um $(1, 0, -1, 0)$ zu finden, müssen wir für den Satz über implizite Funktionen prüfen, dass die Jacobimatrix von F in y-Richtung im Punkte $(1, 0, -1, 0)$ invertierbar ist. Dazu rechnen wir erst allgemein:

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} y_1 & -y_1 \sin(x_2 y_1) & x_1 - y_2 \cos(y_1 y_2) - x_2 \sin(x_2 y_1) & -2y_2 - y_1 \cos(y_1 y_2) \\ -x_2 \exp(x_1 x_2) & 1 - x_1 \exp(x_1 x_2) & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist also

$$J_F(1,0,-1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da der Teil der Matrix in y-Richtung,

$$J_F^y(1,0,-1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

invertierbar ist mit Inverse[1]

$$J_F^y(1,0,-1,0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

kann die Gleichung nahe $(1,0,-1,0)$ nach y aufgelöst werden. D. h. es existieren nach dem Satz über implizite Funktionen offene Umgebungen U und V von $(1,0)$ und $(-1,0)$ sowie eine glatte

[1] Zur Inversenbestimmung kann die Adjunkte Matrix verwendet werden.

Funktion $g\colon U \to V$, so dass für $(x,y) \in U \times V$ gilt: $F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$. Um die Ableitung von g in $(1,0)$ zu bestimmen, rechnen wir:

$$J_g(1,0) = -J_F^y(1,0,-1,0)^{-1} J_F^x(1,0,-1,0) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55. Wir betrachten die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x^2 + y^2, e^{xy})$.

(a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, die eine offene Umgebung U besitzen, so dass $f|U$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

(b) Bestimmen Sie ein maximales Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, so dass $f|_G\colon G \to f(G)$ ein Diffeomorphismus ist.

Lösungsvorschlag. Zu (a): Nach dem Satz von der Umkehrabbildung müssen wir genau die Punkte bestimmen, in denen das Differential von f invertierbar ist, d. h. die Punkte, für die die Jacobimatrix invertierbar ist. Diese ist für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y\mathrm{e}^{xy} & x\mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}.$$

Da für die Determinante gilt

$$\det(J_f(x,y)) = (2x)(x\mathrm{e}^{xy}) - (2y)(y\mathrm{e}^{xy}) = 2(x^2 - y^2)\mathrm{e}^{xy}$$

ist die Jacobimatrix $J_f(x,y)$ genau dann invertierbar, wenn $x^2 \neq y^2$ ist, d. h. wenn $x \neq \pm y$. Für genau solche Paare (x,y) ist f daher in einer Umgebung ein Diffeomorphismus.

Zu (b): Bisher wissen wir, dass das größtmögliche Gebiet höchstens

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq \pm y\}$$

sein kann. Dieses entsteht aus $\mathbb{R}^2$ indem die zwei Achsenhalbierenden herausgenommen werden und zerfällt daher in vier wegzusammenhängende offene Teilmengen. Ein guter Kandidat für ein maximales Gebiet, auf dem f ein Diffeomorphismus ist, wäre also z. B. der Sektor

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, |y| < x\}.$$

Wir müssen zeigen, dass f auf G injektiv ist, denn dann ist $f\colon G \to f(G)$ bijektiv und die Umkehrabbildung nach Teil (a) differenzierbar, denn Differenzierbarkeit muss lediglich lokal geprüft werden und dies haben wir mit Teil (a) getan. Seien also $(x,y), (x',y') \in G$ mit $f(x,y) = f(x',y')$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x'^2 + y'^2 \\ \mathrm{e}^{xy} &= \mathrm{e}^{x'y'} \end{aligned}$$

und aus der Injektivität der Exponentialfunktion folgern wir, dass $xy = x'y'$ ist. In der Hoffnung dies irgendwie auszunutzen, beobachten wir, dass damit

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 = x'^2 + 2x'y' + y'^2 = (x'+y')^2, \\ (x-y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2 = x'^2 - 2x'y' + y'^2 = (x'-y')^2. \end{aligned}$$

Wir würden jetzt gerne die Wurzel ziehen, um an des Pudels Kern zu kommen. Dazu beobachten wir, dass aus den Ungleichungen $|y| < x$ und $|y'| < x'$ folgt, dass $x+y$, $x-y$, $x'+y'$ und $x'-y'$ alle strikt positiv sind. Durch Wurzelziehen folgern wir also, dass

$$\begin{aligned} x+y &= x'+y', \\ x-y &= x'-y'. \end{aligned}$$

Löst man dieses Gleichungssystem nach x und y auf, so folgt $x = x'$ und $y = y'$, d. h. f ist auf G tatsächlich injektiv und damit ein Diffeomorphismus auf $f(G)$. Zudem ist G maximal, denn ist (x_0, y_0) ein Punkt in einem anderen Sektor, so zeigt ein Argument unter Verwendung des Zwischenwertsatzes, dass ein Weg von G zu (x_0, y_0) notwendigerweise eine der Achsenhalbierenden treffen muss. Somit gibt śes keine größere wegzusammenhängende Teilmenge von U, die G enthält.

Aufgabe 56. Zeigen Sie, dass die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, genau ein globales Maximum unter der Nebenbedingung $x^4 + y^4 = 1$ hat und bestimmen Sie dieses.

Lösungsvorschlag. Wir schreiben die Nebenbedingung als $g(x, y) = 0$ wobei

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^4 + y^4 - 1.$$

Nach dem Satz über Lagrange-Multiplikatoren erfüllt jedes lokale Extremum (x_0, y_0) von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ und $\operatorname{grad} g(x, y) \neq 0$, dass $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \lambda \operatorname{grad} g(x_0, y_0)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir berechnen daher die Gradienten:

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{grad} g(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix}.$$

Erst einmal sehen wir hieran, dass $\operatorname{grad} g$ nur in $(0, 0)$ verschwindet und daher auf der Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ überall verschieden von null ist. Die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix}$$

kann zudem nur gelöst werden, wenn $x = y$ ist. Zusätzlich muss aber gelten, dass $x^4 + y^4 = 1$, also $2x^4 = 1$, d. h. $x = y = \pm 2^{-\frac{1}{4}}$. Da die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ kompakt ist, nimmt f auf ihr ein globales Maximum an – notwendigerweise in einem der Punkte $(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}})$ oder $(-2^{-\frac{1}{4}}, -2^{-\frac{1}{4}})$. Durch Einsetzen schließen wir, dass f nur in $(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}})$ sein globales Maximum $f(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{-\frac{1}{4}}) = 2^{\frac{3}{4}}$ annimmt.