Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
21.04.2020
Blatt 01

Musterlösungen
zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 01 (Anwendungen zur Regel von l'Hôpital). Die *Regel von l'Hôpital* (vgl. Aufgabe 55, Blatt 15 von Analysis I) gilt auch für Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$, die am Rand des Definitionsbereiches eines offenen Intervalls $I = (a, b)$ liegen, wobei auch die Fälle $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen sind und auch, wenn Zähler und Nenner beide gegen ∞ gehen: Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$, für alle $x \in I$ sowie $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (für $x_0 = a$ oder $x_0 = b$), so gilt: Existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x) =: c \in \mathbb{R}$, so ist $g(x) \neq 0$, für alle x nahe bei x_0 (bzw. groß/klein genug, wenn $x_0 = \pm\infty$ ist), es konvergiert auch $f(x)/g(x)$ für $x \to x_0$ und es gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Zeigen Sie damit, dass die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}, \qquad \lim_{x\to\infty} x \ln(\frac{x+1}{x-1}).$$

Lösungsvorschlag. (i) Mit $f(x) = x^3$ und $g(x) = \exp(x^2)$ ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Es ist dann $f'(x) = 3x^2$, $g'(x) = 2x\exp(x^2)$, also

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{3x^2}{2xe^{x^2}} = \frac{3x}{2e^{x^2}}.$$

Wir beobachten mit $f_1(x) := 3x$ und $g_1(x) = 2\exp(x^2)$, dass immer noch $\lim_{x\to\infty} f_1(x) = \lim_{x\to\infty} g_2(x) = \infty$ ist und wenden die Regel von l'Hôpital an: $f_1'(x) = 3$, $g_1'(x) = 4x\exp(x^2)$ und sehen jetzt, dass

$$\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{3}{4xe^{x^2}} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es folgt also $f_1/g_1 \to 0$ für $x \to \infty$ und erneute Anwendung von l'Hôpitals Regel führt dann schließlich auch zu

$$\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(ii) Mit $f(x) = \ln((x+1)/x-1))$ (für $x > 1$) und $g(x) = 1/x$ ist

$$x\ln(\frac{x+1}{x-1}) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{(für } x > 1)$$

und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, da $(x+1)/(x-1) \to 1$ für $x \to \infty$, ln stetig in 1 und $\ln(1) = 0$ ist, sowie $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Wir rechnen nun:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-2}{(x+1)(x-1)} = \frac{-2}{x^2-1} \end{aligned}$$

(oder, etwas schneller, wenn man die die Funktionalgleichung (siehe Aufgabe 04) verwendet mit

$$\ln(\frac{x+1}{x-1}) = \ln(x+1) - \ln(x-1)\ ).$$

Andererseits ist $g'(x) = -1/x^2$ und damit

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-2}{x^2-1} \cdot \frac{x^2}{-1} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 2.$$

Mit l'Hôpitals Regel folgt damit:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(\frac{x+1}{x-1}) = 2.$$

Aufgabe 02 (Anwendungen zur Partiellen Integration). Versuchen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen durch Verknüpfungen von bekannten Funktionen auszudrücken, indem Sie auf ihre Integralfunktionen partielle Integration anwenden:

$$f(x) = xe^{-x}\ (x \in \mathbb{R}), \qquad g(x) = \ln(x)\ (x > 0).$$

Lösungsvorschlag. **(i)** Um die Integralfunktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x ye^{-y}\,dy$$

in elementaren Funktionen auszudrücken, setzen wir

$$u(y) = y, \quad \text{also} \quad u'(y) = 1$$

und

$$v(y) = -e^{-y}, \quad \text{also} \quad v'(y) = e^{-y}.$$

Anwenden von partieller Integration liefert dann

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x u(y)v'(y)\,dy = u(y)v(y)|_0^x - \int_0^x u'(y)v(y)\,dy \\ &= u(x)v(x) - u(0)v(0) - \int_0^x 1\cdot(-e^{-y})\,dy = u(x)v(x) - e^{-y}|_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 = -(x+1)e^{-x} + 1. \end{aligned}$$

Die Stammfunktionen von $x \mapsto x\exp(-x)$ ($x \in \mathbb{R}$) werden also durch die Funktionen $F_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_c(x) = -(x+1)e^{-x} + c$$

(mit $c \in \mathbb{R}$) gegeben.

(ii) Bei $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(x)$, gehen wir so vor: Wir setzen

$$u(x) = \ln(x), \quad \text{und damit} \quad u'(x) = \frac{1}{x},$$

sowie

$$v(x) = x, \quad \text{also} \quad v'(x) = 1.$$

Partielle Integration liefert für $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_1^x \ln(y)dy$:

$$\begin{aligned} G(x) &= u(y)v(y)\,|_1^x - \int_1^x u'(y)v(y)\,dy = y\ln(y)\,|_1^x - \int_1^x \frac{1}{y}\cdot y\,dy \\ &= x\ln(x) - y\,|_1^x = x\ln(x) - x + 1. \end{aligned}$$

Die Stammfunktionen von $\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sind also durch $G_c\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$G_c(x) = x\ln(x) - x + c$$

(mit $c \in \mathbb{R}$) gegeben.

Aufgabe 03 (Anwendungen zur Substitutionsregel). Versuchen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ durch Verknüpfungen bekannter Funktionen auszudrücken, indem Sie auf ihre Integralfunktionen die Substitutionsregel anwenden: (Hinweis: Bei einer könnten Sie zudem die so genannte *Partialbruchentwicklung* gebrauchen.)

$$f(x) = xe^{-x^2}, \qquad g(x) = \frac{1}{1+e^x}.$$

Lösungsvorschlag. (i) Für $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_1^x ye^{-y^2}\,dy$$

betrachten wir zunächst nur den Fall $x > 0$ und machen die Variablensubstitution $y^2 = t$ auf $\mathbb{R}_+$, betrachten also $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \sqrt{t}$ (bzw. die Einschränkung auf das Intervall $[1, x^2]$ oder $[x^2, 1]$). Wir machen nun die „Physikerrechnung“:

$$\frac{dt}{dy} = 2y \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dt}{2y}$$

und erhalten wegen $y = x \Leftrightarrow t = x^2$ und $y = 1 \Leftrightarrow t = 1$:

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{y \cdot e^{-t}}{2y}\, dt = \frac{1}{2} \int_1^{x^2} e^{-t}\, dt.$$

[Ein Mathematiker würde etwas sauberer die *Transformation* φ betrachten, $\dot{\varphi}(t) = 1/(2\sqrt{t})$ berechnen und die Substitutionsregel (SR) so anwenden:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x ye^{-y^2}\, dy = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(x^2)} ye^{-y^2}\, dy \\ &\overset{\text{SR}}{=} \int_1^{x^2} \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}^2} \dot{\varphi}(t)\, dt = \int_1^{x^2} \frac{1}{2} e^{-t}\, dt.] \end{aligned}$$

Jetzt können wir mit dem Hauptsatz integrieren:

$$F(x) = \frac{1}{2}(-e^{-t} \Big|_1^{x^2}) = \frac{1}{2}(-e^{-x^2}) + c_0$$

mit einer Konstanten $c_0 \in \mathbb{R}$. Die *Kontrolle*

$$\frac{d}{dx}(-\frac{1}{2}e^{-x^2}) = -\frac{1}{2}(-2x)e^{-x^2)} = xe^{-x^2},$$

für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$, zeigt aber nun, dass $x \mapsto -\frac{1}{2}\exp(-x^2)$ eine Stammfunktion auf <u>ganz $\mathbb{R}$</u> ist. Wir finden also, dass die vollständige Familie aller Stammfunktionen $F_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$F_c(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

(mit $c \in \mathbb{R}$) gegeben ist.

(ii) Sehr ähnlich gehen wir jetzt bei g vor und substituieren $e^x =: u$, also

$$\frac{du}{dx} = u \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{u}.$$

Wir ignorieren nun Konstanten, weil wir ja nur <u>eine</u> (elementare) Stammfunktion zu finden brauchen, denn die anderen ergeben sich ja daraus durch Addition einer Konstanten, und „integrieren ohne Intervallgrenzen“:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{du}{(1+u)u}.$$

Nun machen wir die *Partialbruchzerlegung*

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}.$$

[Bei einer Partialbruchzerlegung einer rationalen Funktion mit zwei Faktoren g_1 und g_2 im Nenner zerlegt man den Bruch in eine Summe von Brüchen derart, dass jeder Summand nur noch g_1 bzw. g_2 im Nenner hat,

$$\frac{f}{g_1 g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

Näheres dazu in den Übungsgruppen.]
Jetzt kennen wir die Stammfunktionen der Summanden,

$$\int \frac{du}{u(1+u)} = \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{1+u} = \ln(u) - \ln(1+u),$$

und resubstutuieren wieder:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln(e^x) - \ln(1+e^x) = x - \ln(1+e^x).$$

Zur Sicherheit – weil ohne die Grenzen alles etwas mysteriös ist – machen wir die *Probe*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x - \ln(1+e^x)) &= 1 - \frac{1}{1+ex} \cdot e^x \\ = \quad \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} &= \frac{1}{1+e^x}. \end{aligned}$$

Die Stammfunktionen $G_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von g sind also mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$G_c(x) = x - \ln(1+e^x) + c.$$

Aufgabe 04. (a) Zeigen Sie für alle $x > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$:

$$\ln(x^r) = r\ln(x).$$

(b) Zeigen Sie für alle $x > 0$ und $y > 0$:

$$\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y).$$

Lösungsvorschlag. (a) Wir wissen bereits, dass

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}$$

ist (für $x > 0$). Mit der Kettenregel berechnen wir dann

$$\frac{d}{dx}\ln(x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot rx^{r-1} = \frac{r}{x} = \frac{d}{dx}(r\ln(x)),$$

und da auch

$$\ln(x^r)|_{x=1} = 0 = (r\ln(x))|_{x=1}$$

ist, folgt für alle $x > 0$:

$$\ln(x^r) = r\ln(x).$$

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+$ ist nach der Funktionalgleichung und Teil (a):

$$\begin{aligned} \ln(\frac{x}{y}) &= \ln(xy^{-1}) = \ln(x) + \ln(y^{-1}) \\ &= \ln(x) + (-1)\ln(y) = \ln(x) - \ln(y). \end{aligned}$$