Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
28.04.2020
Blatt 02

Musterlösungen
zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 05 (Die Hyperbelfunktionen). Seien $\cosh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Hyperbelfunktionen aus der Vorlesung.

(a) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

(b) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \qquad \sinh'(x) = \cosh(x).$$

(c) Zeigen Sie die Funktionalgleichungen für cosh und sinh: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \\ \sinh(x+y) &= \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag.

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) \\ &= \frac{1}{4} 4\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) Dies folgt direkt aus der Identität $\exp' = \exp$ für die Exponentialfunktion und der Kettenregel.

(c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \cosh(x)\cosh(y) &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)\left(\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{y-x} + \mathrm{e}^{-(x+y)}\right) \end{aligned}$$

und ähnlich

$$\sinh(x)\sinh(y) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} - \mathrm{e}^{y-x} + \mathrm{e}^{-(x+y)}\right).$$

Zusammengesetzt folgt

$$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{1}{4}\left(2\mathrm{e}^{x+y} + 2\mathrm{e}^{-(x+y)}\right) = \cosh(x+y).$$

Die Funktionalgleichung für $\sinh(x+y)$ folgt analog oder durch Ableiten nach x oder y aus der Funktionalgleichung für $\cosh(x+y)$.

Aufgabe 06 (Die Area-Funktionen).

(a) Zeigen Sie, dass $\cosh|_{(0,\infty)} \colon (0,\infty) \to (1,\infty)$ und $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv sind, ihre Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} &:= \left(\cosh|_{(0,\infty)}\right)^{-1} : (1,\infty) \to (0,\infty) \\ \operatorname{arsinh} &:= \sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

(gesprochen: „Areacosinus hyperbolicus“ und „Areasinus hyperbolicus“) differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitungen. Skizzieren Sie ihre Graphen.

(b) Bestimmen Sie einen Ausdruck einer Stammfunktion von $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, der neben den elementaren Funktionen, die wir bisher kennen, nur noch die Area-Funktionen enthalten soll. (Hinweis: Substituiere $x = \sinh(t)$ und integriere danach partiell.)

Lösungsvorschlag.

(a) Die Differenzierbarkeit von sinh und cosh ist bereits aus Aufgabe 5 bekannt. Für $x \in (0,\infty)$ ist $\mathrm{e}^{-x} < 1$ und somit

$$\cosh'(x) = \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right) > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2} > 0. \tag{1}$$

Hieran sehen wir, dass cosh auf $(0,\infty)$ strikt monoton steigend ist. Zudem gilt für $x \in (0,\infty)$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) \geq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}$$

woran wir sehen, dass cosh unbeschränkt ist. Somit ist

$$\cosh|_{(0,\infty)} \colon (0,\infty) \to (\cosh(0),\infty) = (1,\infty)$$

bijektiv. Da nach (1) gilt, dass $\cosh|'_{(0,\infty)} > 0$ ist, ist die Inverse arcosh ebenfalls differenzierbar. Die Ableitung ist für $x \in (1,\infty)$ gegeben durch

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Hierbei haben wir in der Identität

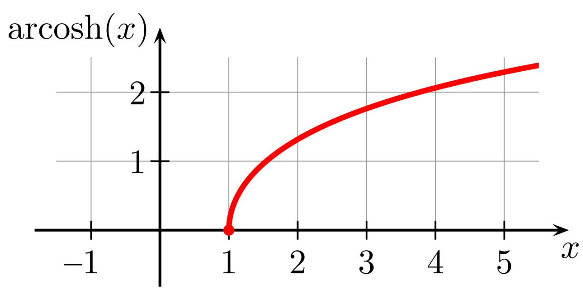
$$\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1}$$

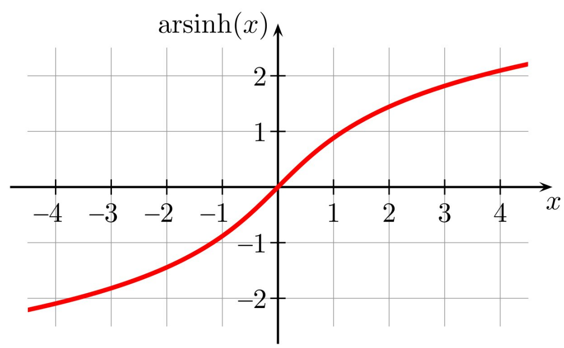
verwendet, dass die linke Seite positiv ist, andernfalls hätten wir rechts ein Minuszeichen vor die Wurzel setzen müssen.

Für den Fall von sinh beobachten wir, dass auf ganz $\mathbb{R}$ gilt, dass $\sinh' = \cosh \geq 1$ und sinh somit strikt monoton wachsend ist. An der Definition $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$ sehen wir zudem ähnlich wie für cosh, dass sich sinh für $x \to \infty$ wie e^x und für $x \to -\infty$ wie $-\mathrm{e}^{-x}$ verhält. Dementsprechend ist sinh sowohl nach unten als auch nach oben unbeschränkt und es folgt mit der strikten Monotonie, dass $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv ist. Für die Ableitung erhält man analog wie oben für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ausschnitte der Graphen sehen wie folgt aus:





(b) Für $z \in \mathbb{R}$ erhalten wir durch Substitution und partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_0^z \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\sinh(0)}^{\sinh(\operatorname{arsinh}(z))} \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\operatorname{arsinh}(z)} \sqrt{\sinh^2(t)+1}\,\sinh'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\operatorname{arsinh}(z)} \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sinh(\operatorname{arsinh}(z))\cosh(\operatorname{arsinh}(z)) - \int_0^{\operatorname{arsinh}(z)} \sinh^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= z\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(z))} - \int_0^{\operatorname{arsinh}(z)} \cosh^2(t) - 1\,\mathrm{d}t \\
&= z\sqrt{1+z^2} + \operatorname{arsinh}(z) - \int_0^{\operatorname{arsinh}(z)} \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Aus der Identität

$$\int_0^{\operatorname{arsinh}(z)} \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t = z\sqrt{1+z^2} + \operatorname{arsinh}(z) - \int_0^{\operatorname{arsinh}(z)} \cosh^2(t)\,\mathrm{d}t$$

schließen wir, dass eine Stammfunktion durch

$$\int_0^z \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(z\sqrt{1+z^2} + \operatorname{arsinh}(z)\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 07 (Kurvendiskussion). Wir definieren $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x^x$.

(a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und bestimmen Sie f'.

(b) Begründen Sie mit dem Satz von Weierstraß und einer Nullstellenuntersuchung von f', dass f genau eine (globale) Minimalstelle x_0 hat und berechnen Sie diese. Wie groß ist dieses Minimum $f(x_0)$ von f in etwa?

(c) Bestimmen Sie, falls existent,

$$\lim_{x\to 0} x^x$$

(was ein guter Kandidat für eine Definition von „0^0“ wäre) und zeigen Sie: f ist auf $(0, x_0)$ streng monoton fallend und auf (x_0, ∞) streng monoton wachsend. Skizzieren sie ihren Graphen.

Lösungsvorschlag.

(a) Für $x \in (0,\infty)$ gilt $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$ und somit ist f nach der Produkt- und Kettenregel stetig differenzierbar. Die Ableitung bestimmen wir mit der Kettenregel als

$$f'(x) = \left(1\cdot\ln(x) + \frac{x}{x}\right)\mathrm{e}^{x\ln(x)} = (\ln(x)+1)\,\mathrm{e}^{x\ln(x)} \qquad \forall x \in (0,\infty).$$

(b) Wegen der strikten Positivität der Exponentialfunktion kann $f'(x) = (\ln(x)+1)\,\mathrm{e}^{x\ln(x)}$ nur verschwinden, wenn $(\ln(x_0)+1) = 0$ gilt, was genau für $x_0 = \mathrm{e}^{-1}$ der Fall ist. Also ist die einzige Nullstelle von f' in e^{-1}. Da f' vor e^{-1} strikt negativ und danach strikt positiv ist, ist f zudem auf $(0,\mathrm{e}^{-1})$ strikt monoton fallend und auf $(\mathrm{e}^{-1}, 0)$ strikt monoton steigend. Also ist

$$f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{\mathrm{e}^{-1}} \approx 0,6922\ldots$$

das globale Minimum von f.

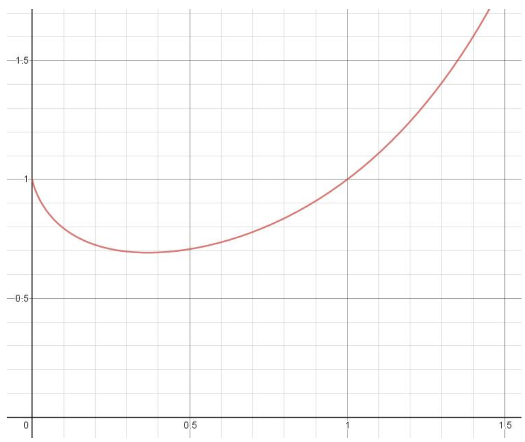
(c) Nach der Regel von de l'Hôpital ist

$$\lim_{x\downarrow 0} x\ln(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\downarrow 0} -x = 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt also

$$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} \mathrm{e}^{x\ln(x)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Eine Skizze eines Ausschnitts des Graphen von f sieht wie folgt aus:



Die Steigung scheint für $x\downarrow 0$ gegen $-\infty$ zu gehen und in der Tat gilt $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = -\infty$, da $\lim_{x\downarrow 0}\ln(x) = -\infty$ ist.

Aufgabe 08 (Das unbestimmte Integral). Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ ein Intervall, $\mathcal{C}^1(I)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetig differenzierbaren Funktionen auf I und $V\subseteq\mathcal{C}^1(I)$ der Untervektorraum, bestehend aus den konstanten Funktionen auf I. Sei weiter $\mathcal{C}^0(I)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf I.

(a) Zeigen Sie (mit dem Homomorphiesatz der Linearen Algebra oder direkt von Hand), dass das Ableiten

$$D\colon \mathcal{C}^1(I)\to\mathcal{C}^0(I),\ F\mapsto F'$$

(genau) eine lineare Abbildung $\bar{D}\colon \mathcal{C}^1(I)/V\to\mathcal{C}^0(I)$ mit $\bar{D}\circ\pi = D$ induziert, wo π die kanonische Projektion von $\mathcal{C}^1(I)$ nach $\mathcal{C}^1(I)/V$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{D}$ ein Isomorphismus ist. (Wir bezeichnen mit $\bar{D}^{-1}(f)\in\mathcal{C}^1(I)/V$ das *unbestimmte Integral von* f, sprechen auch vom *Aufleiten von* f und notieren diese Äquivalenzklasse von Funktionen etwas salopp (ohne untere und obere Grenze) mit

$$\int f(x)dx.)$$

Lösungsvorschlag. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat jede stetige Funktion eine Stammfunktion und somit ist $D(\mathcal{C}^1(I)) = \mathcal{C}^0(I)$, d. h. D ist surjektiv. Zudem ist eine differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{C}^1(I)$ mit $Df = 0$ bereits konstant, was zeigt, dass der Kern der linearen Abbildung D durch V gegeben ist. Gemäß des Homomorphiesatzes gibt es demnach einen eindeutigen linearen Isomorphismus

$$\overline{D} \colon \mathcal{C}^1(I)/V \to D(\mathcal{C}^1(I)) = \mathcal{C}^0(I),$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^1(I) \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{C}^0(I) \\
& \mathcal{C}^1(I)/V \arrow[ur, "\overline{D}"'] &
\end{tikzcd}$$