Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
11.05.2020
Blatt 04

Musterlösungen zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 13. (a) Sei
$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 - 2y = 0\}$$
die *Einheitsparabel*. Geben Sie eine Parametrisierung von P an und berechnen Sie die Länge des Parabelstückes zwischen $(-1, 1/2)$ und $(1, 1/2)$. (Hinweis: Aufgabe 6b)

(b) Sei $H \subseteq \mathbb{R}^2$ der rechte Ast der Einheitshyperbel (vgl. Aufgabe 09) und $P = (\cosh(F), \sinh(F))$ für $F > 0$. Geben Sie einen Ausdruck für die Bogenlänge von H zwischen $(1,0)$ und P an.

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$
die *(Standard-) Ellipse mit den Hauptachsen a und b*. Machen Sie eine Zeichnung von $E \subseteq \mathbb{R}^2$, geben Sie eine Parametrisierung von E mit Hilfe der Kreisfunktionen cos und sin an und dann einen Ausdruck für die Bogenlänge von E.

Lösungsvorschlag.

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha_P \colon (-\infty, \infty) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \big(2t, 2t^2\big) \end{aligned}$$

ist eine Parametrisierung von P.[1] Um die Länge des angegebenen Parabelstücks zu bestimmen, suchen wir zunächst $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ sodass

$$\begin{aligned} \big(2t_0, 2t_0^2\big) &= \alpha_P(t_0) = (-1, 1/2) \\ \big(2t_1, 2t_1^2\big) &= \alpha_P(t_1) = (1, 1/2) \end{aligned}$$

[1] Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis, da wir die Art und Weise schon ausführlich in Aufgabe 11 besprochen haben.

Die jeweils erste Koordinate diktiert $t_0 = -1/2$ bzw. $t_1 = 1/2$. Aber es gilt auch

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$t_0 := -1/2$ und $t_1 := 1/2$ sind also die einzigen Elemente aus $\mathbb{R}$ sodass

$$\alpha_P(t_0) = (-1, 1/2)$$
$$\alpha_P(t_1) = (1, 1/2)$$

Jetzt können wir die Länge $L[\alpha]$ des angegebenen Parabelstücks berechnen, indem wir die Länge des Weges

$$\alpha := \alpha_P|_{[t_0,t_1]}$$

berechnen. Nach Definition gilt mit der Substirutionsregel (SR), weil $(x \mapsto \sqrt{1+x^2}) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade (G) ist und Aufgabe 6 (b)

$$\begin{aligned}
L[\alpha] &= \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\alpha}_P(t)\| \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{4 + 16t^2} \mathrm{d}t \\
&= 2\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + (2t)^2} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x && \text{(SR)} \\
&= \int_{-1}^{0} \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x && \text{(G)} \\
&= 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 \cdot \sqrt{1+1^2} + \operatorname{arsinh}(1)\right) && \text{(A6(b))} \\
&= \sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1)
\end{aligned}$$

(b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass der rechte Ast der Einheitshyperbel durch

$$\begin{aligned}
\alpha_H \colon (-\infty, \infty) &\to \mathbb{R}^2 \\
t &\mapsto (\cosh(t), \sinh(t))
\end{aligned}$$

parametrisiert werden kann. Wir sollen nun die Länge des Weges

$$\alpha(F) := \alpha_H|_{[0,F]}$$

berechnen. Nach Definition gilt mit Aufgabe 5 (a)

$$\begin{aligned}
L[\alpha(F)] &:= \int_0^F \|\dot{\alpha}_H(t)\|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^F \sqrt{\sinh(t)^2 + \cosh(t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^F \sqrt{\sinh(t)^2 + 1 + \sinh(t)^2}\mathrm{d}t && \text{(A5(a))} \\
&= \int_0^F \sqrt{2\sinh(t)^2 + 1}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha_E \colon [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\
t &\mapsto (a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))
\end{aligned}$$

ist eine Parametrisierung von E.[2] Sei jetzt $s \in [0, 2\pi]$. Wir berechnen zunächst die Länge des Weges

$$\alpha(s) := \alpha_E|_{[0,s]}$$

Nach Definition gilt dann mit dem trigonometrischen Pythagoras (TP)

$$\begin{aligned}
L[\alpha(s)] &:= \int_0^s \|\dot{\alpha}_E(t)\|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^s \sqrt{a^2 \cdot \sin(t)^2 + b^2 \cdot \cos(t)^2}\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^s \sqrt{\sin(t)^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \cos(t)^2}\mathrm{d}t \\
&= a\int_0^s \sqrt{1 - \cos(t)^2 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \cos(t)^2}\mathrm{d}t && \text{(TP)} \\
&= a\int_0^s \sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \cos(t)^2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ist zudem $a \geq b$ dann ist

$$\varepsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

wohldefiniert[3] und es gilt

$$L[\alpha(s)] = a\int_0^s \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos(t)^2}\mathrm{d}t$$

So oder so ist die Bogenlänge von E nun gegeben durch $L[\alpha(2\pi)]$.

---

[2] Wieder verzichten wir an dieser Stelle auf einen Beweis aus demselben Grund wie zuvor

[3] ε nennt man numerische Exzentrizität und sie ist eine nicht ganz unbedeutende Größe im Zusammenhang mit Ellipsen (mathematisch und physikalisch)

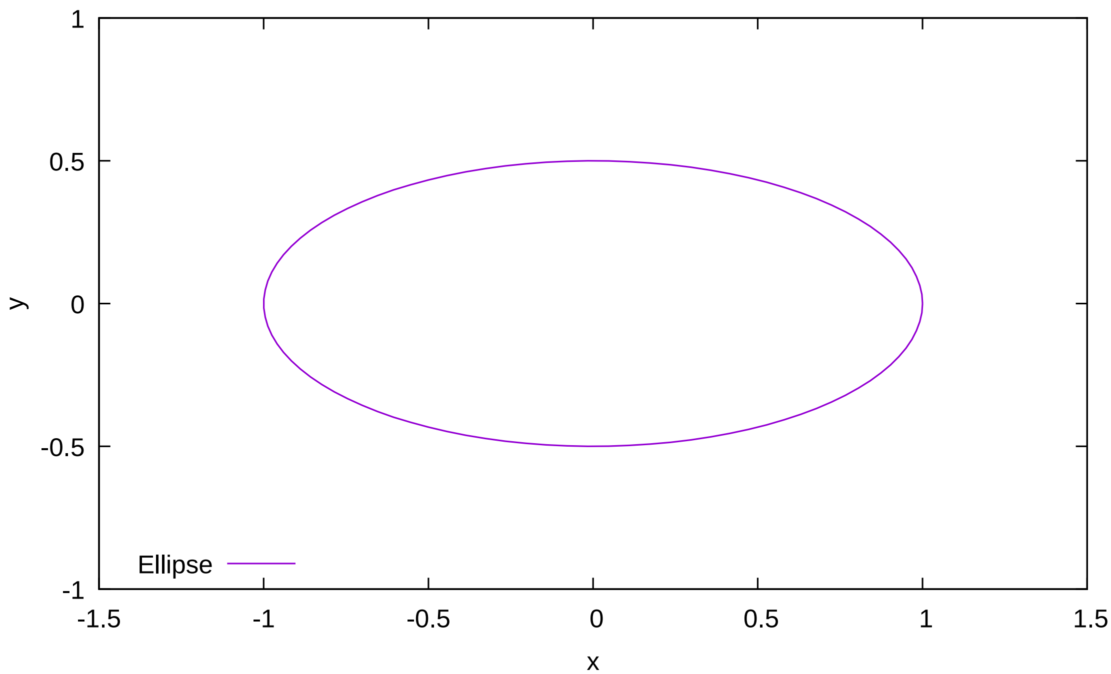

Abbildung 1: Skizze einer Ellipse E mit $a = 1$ und $b = 0.5$

Aufgabe 14. (a) Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'' - f = 0.$$

Zeigen Sie, dass es (genau) zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f = a\cosh + b\sinh$ ist. (Hinweis: Gehen Sie ähnlich wie in der Vorlesung bei cos und sin vor.)

(b) (Die Schwingungsgleichung)

(i) Sei $\omega > 0$. Zeigen Sie, dass es für jede Lösung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der *Schwingungsgleichung*

$$f'' + \omega^2 f = 0$$

(eindeutige) Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x).$$

(ii) Zeigen Sie, dass es für jede Lösung $f \neq 0$ der Schwingungsgleichung ein minimales $T > 0$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x+T) = f(x)$. Berechnen Sie T in Abhängigkeit von ω. ($T > 0$ heißt die *Periode von* f und $\omega > 0$ die *Frequenz* von f.)

Lösungsvorschlag.

(a) Sei f eine Lösung von $f'' - f = 0$. In diesem Kontext gilt

$$\begin{aligned}(f\cosh - f'\sinh)' &= f'\cosh + f\sinh - f''\sinh - f'\cosh \\ &= -\sinh\cdot(f'' - f) \\ &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(-f\sinh + f'\cosh)' &= -f'\sinh - f\cosh + f''\cosh + f'\sinh\\ &= \cosh\cdot(f''-f)\\ &= 0\end{aligned}$$

Damit gibt es also zwei Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x)\cosh(x) - f'(x)\sinh(x) &= a\\ -f(x)\sinh(x) + f'(x)\cosh(x) &= b\end{aligned}$$

und folglich, durch Multiplikation mit $\cosh(x)$ bzw. $\sinh(x)$,

$$\begin{aligned} f(x)\cosh^2(x) - f'(x)\cosh(x)\sinh(x) &= a\cosh(x)\\ -f(x)\sinh^2(x) + f'(x)\cosh(x)\sinh(x) &= b\sinh(x)\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned}& a\cosh(x) + b\sinh(x)\\ &= f(x)\cosh^2(x) - f'(x)\cosh(x)\sinh(x) - f(x)\sinh^2(x) + f'(x)\cosh(x)\sinh(x)\\ &= f(x)\big(\cosh^2(x) - \sinh^2(x)\big)\\ &= f(x)\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.
Für die Eindeutigkeit der Konstanten, seien $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ weitere Konstanten mit

$$\tilde{a}\cosh(x) + \tilde{b}\sinh(x) = f(x) = a\cosh(x) + b\sinh(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$(\tilde{a} - a)\cosh(x) + (\tilde{b} - b)\sinh(x) = 0$$

Mit $\cosh(0) = 1$ und $\sinh(0) = 0$ ergibt sich daraus $\tilde{a} = a$ und folglich

$$(\tilde{b} - b)\sinh(x) = 0$$

Da aber die einzige Nullstelle von sinh bei 0 liegt, ergibt sich aus dieser Gleichung mit $x = \operatorname{arsinh}(1) \neq 0$ (oder jedem anderen $x \neq 0$) auch $\tilde{b} = b$.

(b) (i) Wir gehen ähnlich zu (a) vor. Sei f eine Lösung der Schwingungsgleichung $f'' + \omega^2 f = 0$. In diesem Kontext gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\left(\omega f\cos(\omega(-)) - f'\sin(\omega(-))\right)'(x)\\ &= \omega f'(x)\cos(\omega x) - \omega^2 f(x)\sin(\omega x) - f''(x)\sin(\omega x) - \omega f'(x)\cos(\omega x)\\ &= -\sin(\omega x)(f''(x) + \omega^2 f(x))\\ &= 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\left(\omega f \sin(\omega(-)) + f' \cos(\omega(-))\right)'(x) \\
&= \omega f'(x)\sin(\omega x) + \omega^2 f(x)\cos(\omega x) + f''(x)\cos(\omega x) - \omega f'(x)\sin(\omega x) \\
&= \cos(\omega x)(f''(x) + \omega^2 f(x)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit gibt es also zwei Konstanten $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\omega f(x)\cos(\omega x) - f'(x)\sin(\omega x) &= \hat{a} \\
\omega f(x)\sin(\omega x) + f'(x)\cos(\omega x) &= \hat{b}
\end{aligned}$$

und folglich, durch Multiplikation mit $\cos(\omega x)$ bzw. $\sin(\omega x)$,

$$\begin{aligned}
\omega f(x)\cos^2(\omega x) - f'(x)\cos(\omega x)\sin(\omega x) &= \hat{a}\cos(\omega x) \\
\omega f(x)\sin^2(\omega x) + f'(x)\cos(\omega x)\sin(\omega x) &= \hat{b}\sin(\omega x)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wegen $\cos^2(\omega x) + \sin^2(\omega x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\begin{aligned}
&\hat{a}\cos(\omega x) + \hat{b}\sin(\omega x) \\
&= \omega f(x)\cos^2(\omega x) - f'(x)\cos(\omega x)\sin(\omega x) + \omega f(x)\sin^2(\omega x) + f'(x)\cos(\omega x)\sin(\omega x) \\
&= \omega f(x)\left(\cos^2(\omega x) + \sin^2(\omega x)\right) \\
&= \omega f(x)
\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$. Mit $a := \omega^{-1}\hat{a}$ und $b := \omega^{-1}\hat{b}$ (beachte, dass $\omega \neq 0$) haben wir also zwei Konstanten gefunden, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt,

$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = f(x)$$

Für die Eindeutigkeit der Konstanten, seien $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}$ weitere Konstanten mit

$$\tilde{a}\cos(\omega x) + \tilde{b}\sin(\omega x) = f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$(\tilde{a} - a)\cos(\omega x) + (\tilde{b} - b)\sin(\omega x) = 0$$

Mit $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ ergibt sich daraus $\tilde{a} = a$ und folglich

$$(\tilde{b} - b)\sin(\omega x) = 0$$

Da aber $\sin(\pi/2) = 1$ ist, ergibt sich aus dieser Gleichung mit $x = \pi/(2\omega)$ auch $\tilde{b} = b$.

(ii) Sei nun also f eine Lösung der Schwingungsgleichung für $\omega > 0$ mit $f \neq 0$. Dann existieren nach (i) eindeutige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$, sodass

$$f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

Da $\cos, \sin$ beide 2π-periodisch sind gilt

$$f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = a\cos(\omega x + 2\pi) + b\sin(\omega x + 2\pi) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist $T_\omega := 2\pi/\omega > 0$ auf jeden Fall eine Periode für f. Bleibt die Frage, ob auch eine kleinere Periode möglich ist.
Sei also $T \in (0, T_\omega)$. Für $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
& f(x+T) = f(x) \\
\Leftrightarrow \quad & a\cos(\omega x + \omega T) + b\sin(\omega x + \omega T) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \\
\Leftrightarrow \quad & a\cos(\omega x)\cos(\omega T) - a\sin(\omega x)\sin(\omega T) + b\cos(\omega x)\sin(\omega T) + b\cos(\omega T)\sin(\omega x) \\
& = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \qquad (*) \\
\Leftrightarrow \quad & (a\cos(\omega T) + b\sin(\omega T))\cos(\omega x) + (b\cos(\omega T) - a\sin(\omega T))\sin(\omega x) \\
& = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)
\end{aligned}$$

Bei $(*)$ haben wir die Funktionalgleichungen für cos und sin benutzt. Es gilt also $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann wenn

$$\begin{aligned}
& (a\cos(\omega T) + b\sin(\omega T))\cos(\omega x) + (b\cos(\omega T) - a\sin(\omega T))\sin(\omega x) \\
& = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen der Eindeutigkeit der Konstanten, wie in (i) gezeigt, ist Letzteres aber äquivalent zu

$$a\cos(\omega T) + b\sin(\omega T) = a \qquad \wedge \qquad b\cos(\omega T) - a\sin(\omega T) = b \tag{1}$$

Wegen $T \in (0, T_\omega)$ ist nun $\cos(\omega T) < 1$. Aus der linken Gleichung in (1) ergibt sich damit

$$a = \frac{b\sin(\omega T)}{1 - \cos(\omega T)} \tag{2}$$

und folglich aus der rechten Gleichung,

$$b\left(\cos(\omega T) - \frac{\sin^2(\omega T)}{1 - \cos(\omega T)}\right) = b \tag{3}$$

Für $b = 0$ wäre wegen (2) auch $a = 0$, im Widerspruch zu $(a, b) \neq (0, 0)$. Für $b \neq 0$ würde aus (3) folgen, dass

$$\cos(\omega T) - \frac{\sin^2(\omega T)}{1 - \cos(\omega T)} = 1$$

Wegen $\cos(\omega T) < 1$ ist aber

$$\frac{\sin^2(\omega T)}{1 - \cos(\omega T)} \geq 0$$

und somit

$$\cos(\omega T) - \frac{\sin^2(\omega T)}{1 - \cos(\omega T)} \leq \cos(\omega T) < 1$$

sodass sich auch hier ein Widerspruch ergibt. In jedem Fall ist also die Aussage (1) falsch für $T \in (0, T_\omega)$. Folglich gibt es keine kleinere Periode als T_ω.

Aufgabe 15 (Die Differentialgleichung des Tangens und seine Funktionalgleichung).

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die der Differentialgleichung $f' = 1 + f^2$ genügt. Zeigen Sie, dass dann ein (eindeutiges) $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in I$ gilt: $f(x) = \tan(x + c)$. (Hinweis: Betrachte die Funktion $\arctan \circ f$.)

(b) Seien $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$, so dass auch noch $x + y \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist. Zeigen Sie, dass dann (der Nenner der rechten Seite ungleich Null ist und es) gilt:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

Lösungsvorschlag.

(a) Angenommen $f\colon I \to \mathbb{R}$ löst die DGL

$$f' = 1 + f^2 \tag{4}$$

Zu f definieren wir die Funktionen $\tilde{f} := \arctan \circ f$. $\tilde{f}$ ist als Komposition diffbarer Funktionen diffbar und es gilt für $x \in I$

$$\tilde{f}'(x) = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$$

Benutzt man nun, dass f die DGL (4) erfüllt, dann folgt daraus, dass für alle $x \in I$

$$\tilde{f}'(x) = \frac{1 + f(x)^2}{1 + f(x)^2} = 1$$

Aus dem letzten Semester wissen wir[4], dass es deshalb mit $\tilde{f}(0)$ genau ein Element aus $\mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = x + \tilde{f}(0)$$

bzw. äquivalent

$$f(x) = \tan(x + \tilde{f}(0))$$

Dies ist aber was zu zeigen war.

(b) Seien x, y wie in der Aufgabenstellung. Es gelten die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
\tan(x)\tan(y) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin(x)\sin(y) = \cos(x)\cos(y) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = -\sin(x)\sin(y) + \cos(x)\cos(y) \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(x + y) = 0
\end{aligned}$$

[4]Aufgabe 5 der Ana1-Klausur

Letzteres ist ist unserem Kontext aber falsch u. deshalb auch ersteres. Somit ist der Nenner der rechten Seite in unserem Kontext ungleich Null.
Weiter ist die rechte Seite diffbar in x, und es gilt

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\right)\\
&= \frac{(1+\tan(x)^2)(1-\tan(x)\tan(y)) + (\tan(x)+\tan(y))\tan(y)(1+\tan(x)^2)}{(1-\tan(x)\tan(y))^2}\\
&= \frac{(1+\tan(x)^2)(1-\tan(x)\tan(y)+\tan(x)\tan(y)+\tan(y)^2)}{(1-\tan(x)\tan(y))^2}\\
&= \frac{(1+\tan(x)^2)(1+\tan(y)^2)}{(1-\tan(x)\tan(y))^2}\\
&= \frac{1+\tan(x)^2+\tan(y)^2+\tan(x)^2\tan(y)^2+2\tan(x)\tan(y)-2\tan(x)\tan(y)}{(1-\tan(x)\tan(y))^2}\\
&= \frac{1+(\tan(x)\tan(y))^2-2\tan(x)\tan(y)}{(1-\tan(x)\tan(y))^2} + \frac{(\tan(x)+\tan(y))^2}{(1-\tan(x)\tan(y))^2}\\
&= \frac{(1-\tan(x)\tan(y))^2}{(1-\tan(x)\tan(y))^2} + \left(\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\right)^2\\
&= 1 + \left(\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}\right)^2
\end{aligned}
$$

Dadurch sehen wir, dass

$$x \mapsto \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$$

wobei der Definitionsbereich dieser Abbildung gemäß der Aufgabenstellung sein soll, die DGL (4) erfüllt und mit Teil (a) folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} &= \tan\left(x+\arctan\left(\frac{\tan(0)+\tan(y)}{1-\tan(0)\tan(y)}\right)\right)\\
&= \tan\left(x+\arctan\left(\tan(y)\right)\right)\\
&= \tan\left(x+y\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 16 (Taylor-Polynome). **(a)** Sei $a = 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Bestimmen Sie die Taylorpolynome $P^f_{n,0}$ für $f = \cosh$ und $f = \sinh$.

(b) Bestimmen Sie die Taylor-Polynome der Ordnung 5 im Nullpunkt für die Funktionen Tangens und Arcussinus.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$P^{\cosh}_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cosh^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Nun ist für $j \in \mathbb{N}_0$

$$\cosh^{(2j)}(0) = \cosh(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \cosh^{(2j+1)}(0) = \sinh(0) = 0$$

Damit ergibt sich für $x \in \mathbb{R}$, dass

$$P_{n,0}^{\cosh}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

(ii) Wegen

$$\sinh^{(2j)}(0) = \sinh(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sinh^{(2j+1)}(0) = \cosh(0) = 1$$

für $j \in \mathbb{N}_0$, ergibt sich analog zu (i)

$$P_{n,0}^{\sinh}(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Hier haben wir die Konvention verwendet, dass die leere Summe 0 ist, d.h. für $n = 0$ ergibt sich

$$P_{0,0}^{\sinh}(x) = \sum_{k=0}^{-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$$

(b) (i) Die Ableitungen für $\tan\colon (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\tan^{(0)} = \tan, \qquad \tan^{(0)}(0) = 0\\
&\tan^{(1)} = 1 + \tan^2, \qquad \tan^{(1)}(0) = 1\\
&\tan^{(2)} = 2\tan\tan^{(1)}, \qquad \tan^{(2)}(0) = 0\\
&\tan^{(3)} = 2\left(\tan^{(1)}\right)^2 + 2\tan\tan^{(2)}, \qquad \tan^{(3)}(0) = 2\\
&\tan^{(4)} = 6\tan^{(1)}\tan^{(2)} + 2\tan\tan^{(3)}, \qquad \tan^{(4)}(0) = 0\\
&\tan^{(5)} = 6\left(\tan^{(2)}\right)^2 + 8\tan^{(1)}\tan^{(3)} + 2\tan\tan^{(4)}, \qquad \tan^{(5)}(0) = 16
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Taylor-Polynom der Ordnung 5 im Nullpunkt

$$P_{5,0}^{\tan}(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$$

(ii) Die Ableitungen für $\arcsin\colon (-1,1) \to (-\pi/2, \pi/2)$ sind für $x \in (-1,1)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\arcsin^{(0)}(x) = \arcsin(x), \qquad \arcsin^{(0)}(0) = 0\\
&\arcsin^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arcsin^{(1)}(0) = 1\\
&\arcsin^{(2)}(x) = x\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \qquad \arcsin^{(2)}(0) = 0\\
&\arcsin^{(3)}(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}, \qquad \arcsin^{(3)}(0) = 1\\
&\arcsin^{(4)}(x) = 9x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 15x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{7}{2}}, \qquad \arcsin^{(4)}(0) = 0\\
&\arcsin^{(5)}(x) = 9\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}} + 90x^2\left(1-x^2\right)^{-\frac{7}{2}} + 105x^4\left(1-x^2\right)^{-\frac{7}{2}}, \qquad \arcsin^{(5)}(0) = 9
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Taylor-Polynom der Ordnung 5 im Nullpunkt

$$P_{5,0}^{\arcsin}(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{9}{5!}x^5 = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$$