Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose, Nikolai Edeko
Aron Müller, Marius Müller

SoSe 2020
22.06.2020
Blatt 09

Musterlösungen
zu den Übungen der Analysis II

Aufgabe 33. **(a)** Zeigen Sie, dass eine Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) genau dann konvergiert, wenn ihre Komponentenfolgen $(x_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren ($j = 1, \dots, n$).

(b) Zeigen Sie, dass die kanonischen Projektionen $\pi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_j$ ($n \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$) stetig sind.

(c) Sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $f \colon X \to \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) genau dann stetig ist, wenn ihre Komponentenbbildungen $f_j := \pi_j \circ f \colon X \to \mathbb{R}$ stetig sind ($j = 1, \dots, n$).

Lösungsvorschlag. **(a)** Wir rechnen mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$.
„$\Rightarrow$“: Sei also $(x^{(k)})$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, die gegen $a \in \mathbb{R}^n$ konvergiere und $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$|x_j^{(k)} - a_j| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k)} - a_i)^2} = \|x^{(k)} - a\| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es konvergiert also auch $(x_j^{(k)})$ gegen a_j.
„$\Leftarrow$“: Umgekehrt konvergiere jede Komponentenfolge $(x_j^{(k)})$ einer Folge $(x^{(k)})$ in $\mathbb{R}^n$ gegen ein $a_j \in \mathbb{R}$. Setzt man $a := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, so folgt aus den üblichen Grenzwertsätzen, dass

$$\|x^{(k)} - a\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(k)} - a_j)^2 \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

und damit auch $(x^{(k)})$ gegen a konvergiert.

(b) Es konvergiere eine Folge $(x^{(k)})$ gegen $a \in \mathbb{R}^n$. Nach Teil (a) gilt dann für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\pi_j(x^{(k)}) = x_j^{(k)} \longrightarrow a_j = \pi_j(a).$$

Das zeigt, dass π_j stetig in a ist, also stetig (schlechthin), da a beliebig war.

(c) Allgemein gilt für metrische Räume X, Y, Z, Punkten $a \in X$, $b \in Y$ und Abbildungen $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ mit $f(a) = b$: Ist f stetig in a und g stetig in b, so ist die Komposition $g \circ f \colon X \to Y$ stetig in a, insbesondere sind also Kompositionen stetiger Abbildungen wieder stetig. Denn ist (x_n) eine Folge in X, die gegen a, konvergiert, so konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))$ in Y gegen b (weil f stetig in a ist) und daher die „Bildbildfolge“ $g \circ f(x_n) = g(f(x_n))$ in Z gegen $g(b) = g \circ f(a)$ (weil g stetig in b ist).

„$\Rightarrow$": Ist nun $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ stetig, so ist für jedes $j = 1, \ldots, n$ die Komponentenabbildung $f_j = f \circ \pi_j\colon X \to \mathbb{R}$ stetig, denn π_j ist nach Teil (b) stetig.
„$\Leftarrow$": Um die Stetigkeit von f in einem Punkt $a \in X$ zu prüfen, betrachten wir eine Folge $(x^{(k)})$ in X, die gegen a konvergiert und nennen $y^{(k)} := f(x^{(k)})$ und $b := f(a)$. Da $f_j = \pi_j \circ f$ stetig in a ist ($j = 1, \ldots, n$), erhalten wir

$$y_j^{(k)} = \pi_j \circ f(x^{(k)}) \longrightarrow \pi_j \circ f(a) = b_j.$$

Nach Teil (a) bedeutet das aber gerade $y^{(k)} \to b$. Also ist f stetig in a.

Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *eine Topologie auf* X (und (X, τ) dann ein *topologischer Raum*), wenn für τ folgende Axiomatik gilt: (i) $\emptyset, X \in \tau$; (ii) $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$; (iii) $U_i \in \tau$ $(i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$. (Die Elemente von τ nennt man die *offenen Teilmengen von* X.)

Aufgabe 34. (a) Eine Topologie auf X heißt *Hausdorffsch*, wenn es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Zeigen Sie, dass die von einer Metrik auf X *induzierte Topologie* Hausdorffsch ist.

(b) Konvergenz von Folgen in topologischen Räumen wird genauso definiert wie in metrischen Räumen. Also wie? Zeigen Sie: Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einem Hausdorffschen topologischen Raum (einem *Hausdorff-Raum*) ist eindeutig bestimmt.

Lösungsvorschlag. (a) Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$, so ist ihr Abstand $d := d(x, y) > 0$. Dann setzen wir $U := B_{d/2}(x)$ und $V := B_{d/2}(y)$. Dann gilt sicher, dass $x \in U$ und $y \in V$ ist und auch, dass die Kugeln U und V offen in X sind. Aber ihr Durchschnitt ist auch leer, denn gäbe es ein $z \in U \cap V$, so wäre nach der Dreiecksungleichung

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d,$$

Widerspruch.

(b) Der Konvergenzbegriff von Folgen in metrischen Räumen lässt sich vollständig in Termen der induzierten Topologie formulieren: Zunächst heißt eine Teilmenge $S \subseteq X$ eine Umgebung von x, wenn es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt mit $x \in U \subseteq S$. Und dann nennt man eine Folge (x_n) in X konvergent gegen $a \in X$, falls in jeder Umgebung von a fast alle (d.h.: alle, bis auf endlich viele) Folgenglieder liegen. Ist nun eine Folge (x_n) in einem Hausdorffraum X (mit dieser Definition auch in X) konvergent gegen $a \in X$, und ist $b \in X$ mit $a \neq b$, so kann man a und b nach der *Trennungseigenschaft* (wie man sagt) *trennen*, d.h.: man findet offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $a \in U$, $b \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Da nun U eine Umgebung von a ist, liegen fast alle Folgenglieder in U und da U und V disjunkt sind, können also nur noch endlich viele Folgenglieder in V liegen. Dann kann aber b kein Grenzwert von (x_n) sein, denn dann müssten auch in V fast alle Folgenglieder liegen. [Anmerkung: In nicht-Hausdorffschen Räumen können Folgen durchaus mehrere Grenzwerte haben. Ein extremes Beispiel ist durch die so genannte *indiskrete Topologie* auf einer Menge gegeben, bei der nur $\emptyset$ und X offen ist. (Das erfüllt offenbar die geforderten Axiome.) Nun stellt man fest: *Jede* Folge in X konvergiert gegen *jeden* Punkt in X.]

Aufgabe 35. (a) Sei X ein vollständiger metrischer Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Zeigen Sie, dass A, zusammen mit der induzierten Metrik, vollständig ist.

(b) Sei $\mathcal{B}[a,b]$ der Raum der beschränkten (reellwertigen) Funktionen auf dem Intervall $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ zusammen mit seiner Supremumsnorm (vgl. Aufgabe 32). Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}[a,b] \subseteq \mathcal{B}[a,b]$ abgeschlossen (und damit ein Banachraum) ist.

Lösungsvorschlag. (a) Betrachten wir dazu also eine Cauchy-Folge (x_n) in A. Wir müssen zeigen, dass sie in A konvergiert. Aber (x_n) ist natürlich auch eine Cauchy-Folge in X, denn wir betrachten ja die induzierte Metrik auf A. Da aber X vollständig ist, hat (x_n) einen Grenzwert a in X, $(x_n) \to a$. Da A abgeschlossen ist, gehört aber a zu A und Konvergenz in X ist dann das Gleiche wie Konvergenz in A. Also hat (x_n) einen Grenzwert in A.

(b) Wir betrachten eine Folge (f_n) in $\mathcal{C}[a,b]$, die in der Supremumsnorm gegen ein $f \in \mathcal{B}[a,b]$ kovergiert, $(f_n) \to f$. Wir wollen zeigen, dass f dann auch in $\mathcal{C}[a,b]$ liegt, denn das bedeutet die Abgeschlossenheit von $\mathcal{C}[a,b]$ in $\mathcal{B}[a,b]$. Aber Konvergenz in der Supremumsnorm impliziert gerade (und ist sogar geichwertig zu) gleichmäßige(r) Konvergenz, denn ist $\varepsilon > 0$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Nach einem bekannten Satz ist damit aber aber auch f stetig, d.h.:$f \in \mathcal{C}[a,b]$. (Da $\mathcal{C}[a,b]$ ein Unterraum des vollständig normierten Vektorraums $\mathcal{B}[a,b]$ (nach Aufgabe 32) ist, ist damit nach Teil (a) $\mathcal{C}[a,b]$ selbst ein vollständig normierter Vektorraum, d.i. ein Banachraum.)

Aufgabe 36. Zeigen Sie mit Hilfe von folgender Anleitung, dass l^2 (vgl. Aufgabe 30) vollständig ist. (Einen vollständigen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nennt man einen *Hilbertraum.*)

(i) Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in l^2. Zeigen Sie, dass die Komponentenfolgen $(x_n^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ (für alle $n \in \mathbb{N}$) Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind. (Wir setzen dann: $a_n := \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}$.)

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon/2$ ist, für alle $k, l \geq k_0$. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \geq k_0$ gibt, so dass für alle $k \geq k_n$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(k)} - a_j)^2 < \frac{1}{8}\varepsilon^2.$$

(iii) Benutzen Sie $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ $(\forall a, b \in \mathbb{R})$ und zeigen Sie durch „Einfügen einer nahrhaften Null“, dass für alle $k \geq k_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(k)} - a_j)^2 < \frac{3}{4}\varepsilon^2.$$

(iv) Zeigen Sie schließlich, dass für $k \geq k_0$ gilt: $x^{(k)} - a \in l^2$, daraus $a \in l^2$ und dann, dass $(x^{(k)}) \to a$ in l^2.

Lösungsvorschlag. Wir wollen zeigen, dass jede Cauchy-Folge in l^2 konvergiert. Sei also $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine solche in l^2. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq k_0$ gilt: $\|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \varepsilon/2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}| \leq \|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Das zeigt, dass auch jede Komponentenfolge $(x_n^{(k)})$ in $\mathbb{R}$ eine Cauchyfolge ist und damit wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ konvergiert. Wir setzen $a_n := \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} \in \mathbb{R}$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ für einen Augenblick fest, so ist wegen der Konvergenz von $(x_j^{(k)}) \to a_j$, für alle $j = 1, \ldots, n$, nach den üblichen Grenzwertsätzen $(\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - a_j)^2)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Es existiert deshalb ein $k_n \geq k_0$, so dass für alle $k \geq k_n$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - a_j)^2 < \frac{1}{8}\varepsilon^2.$$

Da für alle $a, b \in \mathbb{R}$ aus $(a-b)^2 \geq 0$ auch $2ab \leq a^2 + b^2$ folgt, ist $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$. Nun fügen wir eine „nahrhafte Null“ in der folgenden Ungleichungskette wie folgt ein. Für alle $k \geq k_0$ ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - a_j)^2 &= \sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_j^{(k_n)} + x_j^{(k_n)} - a_j)^2 \leq 2(\sum_{j=1}^n (x_j^{(k)} - x_j^{(k_n)})^2 + \sum_{j=1}^n (x_j^{(k_n)} - a_j)^2) \\ &< 2(\|x^{(k)} - x^{(k_n)}\|^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^2) < 2(\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^2) = \frac{3}{4}\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Weil das für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist insbesondere

$$\sum_{n=1}^\infty (x_n^{(k)} - a_n)^2 < \infty,$$

und damit $x^{(k)} - a \in l^2$, wenn wir $a := (a_n)$ setzen. Als Differenz von zwei quadratsummierbaren Folgen ist damit aber auch $a = x^{(k)} - (x^{(k)} - a)$ (für $k \geq k_0$) in l^2. Aus der obigen Ungleichungskette sieht man nun schließlich durch Grenzbergang für $n \to \infty$, dass

$$\|x^{(k)} - a\|^2 = \sum_{n=1}^\infty (x_n^{(k)} - a_n)^2 \leq \frac{3}{4}\varepsilon^2 < \varepsilon^2,$$

für alle $k \geq k_0$ ist, also $(x^{(k)}) \to a$ in l^2.